

УДК 531.37; 534.1

ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ПРИСОЕДИНЕННОЙ К КОСМИЧЕСКОМУ АППАРАТУ УПРУГОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ В РЕДУЦИРОВАННОЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ ПО ИЗГИБУ*

Русских С.В.

*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)», ФГБУН «Институт прикладной механики
Российской академии наук», г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Рассматривается нелинейная динамика плоской стержневой системы, состоящей из упругих нерастяжимых стержней, связанных между собой на концах упруговязкими узловыми шарнирами, допускающими большие углы поворота. Стержневая система присоединена к недеформируемому космическому аппарату, который совершает поворот относительно своего центра тяжести и перемещения по горизонтальной и вертикальной оси как свободное твердое тело. Движение рассматриваемой системы описывается в подвижной системе координат. Перемещения каждого стержня характеризуются его конечным поворотом как твердого тела относительно прямой, проходящей через два соседних шарнирных узла, и изгибом с малым поперечным перемещением.

Приведены с необходимыми пояснениями уравнения движения в компактном виде, которые получены в скоростях для космического аппарата и в выбранных обобщенных координатах для стержневой системы на основании принципа возможных перемещений. Уравнения также получены в матричном виде, удобном для численного интегрирования.

Представлена постановка задачи, которая получается путем редуцирования исходной системы уравнений по квазистатическому изгибу. Из уравнений движения исключаются «быстрые» движения, которые представляют собой изгиб каждого стержня, т.е. первые и вторые производные от углов между касательной к изогнутой оси стержня и его недеформированной осью. В результате в матричном виде записана новая система уравнений с необходимыми пояснениями.

Приведены примеры расчета с необходимыми сравнениями между двумя подходами: задача о реакции стержневой системы на произвольный возмущающий импульс; задача о развертывании стержневой системы из одного положения в другое при помощи включения упруговязких зажимов, интегрированных в узловых шарниры, за счет центробежных и инерционных сил.

Ключевые слова: нелинейная динамика; космический аппарат; стержневая система; подвижная система координат; трансформируемая система; редуцирование; квазистатический изгиб

THE PROBLEM OF NONLINEAR DYNAMICS OF AN OF ELASTIC ROD SYSTEM CONNECTED TO A SPACECRAFT IN A REDUCED QUASI-STATIC BENDING STATEMENT

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-38-00300мол_а) и в рамках работы по Государственному заданию ИРИМ РАН.

Russkikh S.V.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Institute of Applied Mechanics Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

ABSTRACT

Nonlinear dynamics of a planar rod system consisting of elastic inextensible rods, connected at the ends by elastic knot joints that allow large angles of rotation, is considered. The rod system is connected to an undeformed spacecraft that makes a turn about its center of gravity and movements along the horizontal and vertical axis as a free solid body. The motion of the system under consideration is described in a mobile coordinate system. The displacements of each rod are characterized by its final rotation as a rigid body with respect to a straight line passing through two adjacent hinges and a bend with a small transverse displacement.

The equations of motion in compact form with the necessary explanations are given, which are obtained at speeds for the spacecraft and in the selected generalized coordinates for the rod system on the basis of the principle of possible displacements. Equations are also obtained in a matrix form convenient for numerical integration.

The statement of the problem is presented, which is obtained by reducing the initial system of equations by quasistatic bending. From the equations of motion, "rapid" movements are excluded, which represent the bending of each rod, i.e. the first and second derivatives of the angles between the tangent to the curved axis of the rod and its undeformed axis. As a result, a new system of equations with necessary explanations is written in the matrix form.

Examples of calculations with the necessary comparisons between two approaches are given: the problem of the reaction of a rod system to an arbitrary perturbing impulse; the problem of the deployment of the rod system from one position to another by the inclusion of elastic-viscous clamps integrated into the hinges, due to centrifugal and inertial forces.

Keywords: nonlinear dynamics; spacecraft; rod system; mobile coordinate system; transformable system; reduction; quasi-static bend

ВВЕДЕНИЕ

Динамике упругих стержневых систем при больших перемещениях и углах поворота посвящены работы [см. например, 1,2]. Такие системы имеют многочисленные практические приложения к различным задачам динамики космических конструкций [3-5]. Например, используемые в настоящее время космические аппараты (КА) представляют собой, как правило, сложные конструкции, состоящие из различных элементов. После выведения на орбиту эти системы, предварительно компактно упакованные, претерпевают существенные изменения формы, приобретая конфигурацию, определяемую функциональным назначением КА. К таким системам относятся панели солнечных батарей, штанги гравитационной стабилизации, космические манипуляторы, ферменные конструкции, антенные конструкции, тросовые системы и т.д. Задачам моделирования развертывания или трансформации таких систем посвящены многочисленные работы [6-12].

В конечно-элементных моделях гибких стержневых систем, используемых в комплексах (ANSYS, NASTRAN, FEMAP, ABAQUS и др.), наряду с изгибом и кручением обычно учитывается и продольное растяжение стержней. Это приводит к сравнительно простым и разреженным системам дифференциальных уравнений для узловых перемещений и углов поворота [5]. Однако вследствие

большой жесткости элементов на растяжение по сравнению с изгибом и кручением в таких конечно-элементных моделях присутствуют высокочастотные осцилляции, связанные с продольными перемещениями. Поэтому дифференциальные уравнения движения таких систем являются уравнениями «жесткого типа» и проявляют склонность к вычислительной неустойчивости на больших интервалах времени.

В отличие от [13], в данной работе рассмотрена плоская трансформируемая стержневая система, состоящая из упругих нерастяжимых стержней, движение которой описывается в подвижной системе координат.

В данной работе, являющейся продолжением работ [14,15], представлена постановка задачи, которая получается путем редуцирования исходной системы уравнений по квазистатическому изгибу. Из уравнений движения исключаются «быстрые» движения, которые представляют собой изгиб каждого стержня, т.е. первые и вторые производные от углов между касательной к изогнутой оси стержня и его недеформированной осью.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается соединенная с КА в узле $k=0$ с координатами x_0, y_0 плоская стержневая система, состоящая из упругих произвольно ориентированных нерастяжимых стержней, связанных между собой на концах упруговязкими узловыми шарнирами, допускающими большие углы поворота, рис. 1.

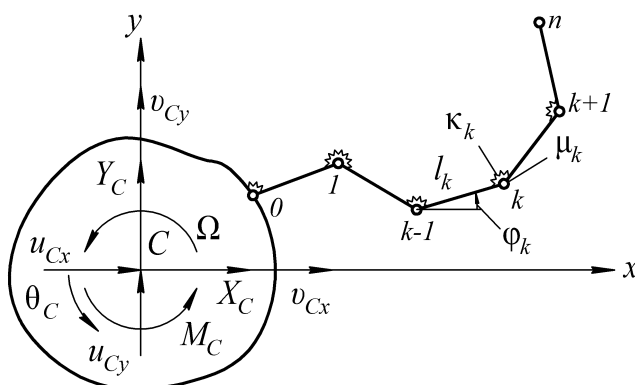


Рис. 1. Модель КА с присоединенной стержневой системой.

Погонные массы m_k и изгибные жесткости EI_k стержней считаются постоянными в пределах их длин $l_k, k=1,2,\dots,n$. В шарнирных узлах $k=0,1,\dots,n$ имеются сосредоточенные массы μ_k и пружины с угловой жесткостью κ_k и вязким демпфированием ν_k .

Движение свободной составной системы (КА и стержневая система) описывается в подвижной системе координат S_{xy} , связанной с недеформируемым твердым телом (КА), с началом в его центре масс. Параметры КА: масса – M_0 , момент инерции относительно центра тяжести – J_0 . Проекция скорости точки C на оси подвижной системы координат обозначим через $v_{Cx}(t), v_{Cy}(t)$, а угловую скорость КА – через $\Omega(t)$. Кинематика КА определяется проекциями на оси подвижной системы координат перемещений

центра тяжести u_{Cx} и u_{Cy} , а также углом поворота θ_C : $v_{Cx} = \dot{u}_{Cx} - \Omega u_{Cy}$;
 $v_{Cy} = \dot{u}_{Cy} + \Omega u_{Cx}$.

Активное управление системой может осуществляться за счет приложенных к КА сил $X_C(t)$, $Y_C(t)$ и момента $M_C(t)$ (рис.1) с последующим торможением на упруго-вязких ограничителях.

Перемещения k -го стержня относительно подвижной системы координат обусловлены его поворотом как твердого тела на угол $\varphi_k(t)$, отсчитываемым от оси x (т.е. поворотом прямой, проходящей через узлы $k-1$ и k), и изгибом относительно этой прямой. Изгибное (поперечное) перемещение $\eta_k(s,t)$ точки s k -го стержня будем считать малым и упругим и будем представлять его углами α_k и β_k между касательной к изогнутой оси стержня и его недеформированной осью в $(k-1)$ -ом и k -ом шарнирных узлах, рис.2.

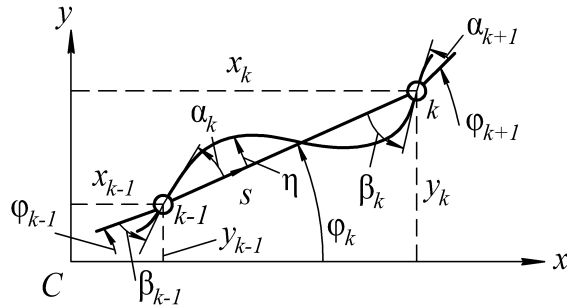


Рис. 2. Стержневой элемент системы.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Все необходимые предпосылки и пояснения к получению уравнений движения с помощью принципа возможных перемещений (принципа Даламбера-Лагранжа) были представлены в работе [14]. Система $3n+3$ обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для неизвестных скоростей v_{Cx} , v_{Cy} , Ω и второго порядка для обобщенных координат φ_k , α_k , β_k ($k=1,2,\dots,n$) записывается в виде

$$L_{ux} = X_C, \quad (1)$$

$$L_{uy} = Y_C, \quad (2)$$

$$L_{\theta C} = M_C, \quad (3)$$

$$L_{\varphi k} - \kappa_{k-1}\varphi_{k-1} + (\kappa_{k-1} + \kappa_k)\varphi_k - \kappa_k\varphi_{k+1} + \kappa_{k-1}\alpha_k - \kappa_k\alpha_{k+1} - \kappa_{k-1}\beta_{k-1} + \\ + \kappa_k\beta_k - v_{k-1}\dot{\varphi}_{k-1} + (v_{k-1} + v_k)\dot{\varphi}_k - v_k\dot{\varphi}_{k+1} + v_{k-1}\dot{\alpha}_k - v_k\dot{\alpha}_{k+1} - \\ - v_{k-1}\dot{\beta}_{k-1} + v_k\dot{\beta}_k = 0, \quad (4)$$

$$L_{\alpha k} - \kappa_{k-1}\varphi_{k-1} + \kappa_{k-1}\varphi_k + (\kappa_{k-1} + \frac{4EI_k}{l_k})\alpha_k - \kappa_{k-1}\beta_{k-1} + \frac{2EI_k}{l_k}\beta_k + \\ - v_{k-1}\dot{\varphi}_{k-1} + v_{k-1}\dot{\varphi}_k + v_{k-1}\dot{\alpha}_k - v_{k-1}\dot{\beta}_{k-1} = 0, \quad (5)$$

$$L_{\beta k} + \kappa_k \varphi_k - \varphi_{k+1} \kappa_k + \frac{2EI_k}{l_k} \alpha_k - \kappa_k \alpha_{k+1} + (\kappa_k + \frac{4EI_k}{l_k}) \beta_k + v_k \dot{\varphi}_k - v_k \dot{\varphi}_{k+1} - v_k \dot{\alpha}_{k+1} + v_k \dot{\beta}_k = 0. \tag{6}$$

В уравнениях (1)-(6): $k = 1, 2, \dots, n$; $\kappa_n = 0$, $v_n = 0$. Введены следующие обозначения

$$M = M_0 + \sum_{k=1}^n [\mu_k + m_k l_k], \quad M_k = \sum_{j=k}^n [\mu_j + m_j l_j] - \frac{m_k l_k}{2},$$

$$J = J_0 + \sum_{k=1}^n \{ (\mu_k + m_k l_k) [(x_0 + \sum_{j=1}^k l_j c_j)^2 + (y_0 + \sum_{j=1}^k l_j s_j)^2] - m_k l_k^2 [c_k x_0 + s_k y_0 + \sum_{j=1}^k l_j c_{kj}] + \frac{m_k l_k^3}{3} \}, \tag{7}$$

$$s_k = \sin \varphi_k, \quad c_k = \cos \varphi_k, \quad s_{kj} = \sin(\varphi_k - \varphi_j), \quad c_{kj} = \cos(\varphi_k - \varphi_j),$$

$$\delta_{kj} = 0 \text{ при } k \neq j, \quad \delta_{kj} = 1 \text{ при } k = j,$$

где M – полная масса рассматриваемой системы; M_k – «отсеченная» масса системы, начиная с k -го шарнира; J – момент инерции системы, значение которого зависит от положения стержней на плоскости $Cxу$ подвижной системы координат.

Нелинейные дифференциальные выражения L_{ux} , L_{uy} , $L_{\theta C}$, $L_{\varphi k}$, $L_{\alpha k}$, $L_{\beta k}$, входящие в (1)-(6), имеют вид

$$L_{ux} = m_{ux}^{vx} \dot{v}_{Cx} + m_{ux}^{vy} \dot{v}_{Cy} + m_{ux}^{\Omega} \dot{\Omega} + \sum_{k=1}^n [m_{ux}^{\varphi k} \ddot{\varphi}_k] + \sum_{k=1}^n [m_{ux}^{\alpha k} \ddot{\alpha}_k] + \sum_{k=1}^n [m_{ux}^{\beta k} \ddot{\beta}_k] + g_{ux}^{\Omega ux} \Omega v_{Cx} + g_{ux}^{\Omega vy} \Omega v_{Cy} + g_{ux}^{\Omega} \Omega^2 + \sum_{k=1}^n [g_{ux}^{\Omega \varphi k} (2\Omega \dot{\varphi}_k + \dot{\varphi}_k^2)] + \sum_{k=1}^n [g_{ux}^{\alpha k \beta k} (\dot{\alpha}_k - \dot{\beta}_k)(\Omega + \dot{\varphi}_k)], \tag{8}$$

$$L_{uy} = m_{uy}^{vx} \dot{v}_{Cx} + m_{uy}^{vy} \dot{v}_{Cy} + m_{uy}^{\Omega} \dot{\Omega} + \sum_{k=1}^n [m_{uy}^{\varphi k} \ddot{\varphi}_k] + \sum_{k=1}^n [m_{uy}^{\alpha k} \ddot{\alpha}_k] + \sum_{k=1}^n [m_{uy}^{\beta k} \ddot{\beta}_k] + g_{uy}^{\Omega ux} \Omega v_{Cx} + g_{uy}^{\Omega vy} \Omega v_{Cy} + g_{uy}^{\Omega} \Omega^2 + \sum_{k=1}^n [g_{uy}^{\Omega \varphi k} (2\Omega \dot{\varphi}_k + \dot{\varphi}_k^2)] + \sum_{k=1}^n [g_{uy}^{\alpha k \beta k} (\dot{\alpha}_k - \dot{\beta}_k)(\Omega + \dot{\varphi}_k)], \tag{9}$$

$$L_{\theta C} = m_{\theta C}^{vx} \dot{v}_{Cx} + m_{\theta C}^{vy} \dot{v}_{Cy} + m_{\theta C}^{\Omega} \dot{\Omega} + \sum_{k=1}^n [m_{\theta C}^{\varphi k} \ddot{\varphi}_k] + \sum_{k=1}^n [m_{\theta C}^{\alpha k} \ddot{\alpha}_k] + \sum_{k=1}^n [m_{\theta C}^{\beta k} \ddot{\beta}_k] + g_{\theta C}^{\Omega ux} \Omega v_{Cx} + g_{\theta C}^{\Omega vy} \Omega v_{Cy} + g_{\theta C}^{\Omega} \Omega^2 + \sum_{k=1}^n [g_{\theta C}^{\Omega \varphi k} (2\Omega \dot{\varphi}_k + \dot{\varphi}_k^2)] + \sum_{k=1}^n [g_{\theta C}^{\alpha k \beta k} (\dot{\alpha}_k - \dot{\beta}_k)(\Omega + \dot{\varphi}_k)], \tag{10}$$

$$L_{\varphi k} = m_{\varphi k}^{vx} \dot{v}_{Cx} + m_{\varphi k}^{vy} \dot{v}_{Cy} + m_{\varphi k}^{\Omega} \dot{\Omega} + \sum_{j=1}^n [m_{\varphi k}^{\varphi j} \ddot{\varphi}_j] + \sum_{j=1}^n [m_{\varphi k}^{\alpha j} \ddot{\alpha}_j] +$$

$$+ \sum_{j=1}^n [m_{\varphi k}^{\beta j} \ddot{\beta}_j] + g_{\varphi k}^{\Omega vx} \Omega v_{Cx} + g_{\varphi k}^{\Omega vy} \Omega v_{Cy} + g_{\varphi k}^{\Omega} \Omega^2 + \quad (11)$$

$$+ \sum_{j=1}^n [g_{\varphi k}^{\Omega \varphi j} (2\Omega \dot{\varphi}_j + \dot{\varphi}_j^2)] + \sum_{j=1}^n [g_{\varphi k}^{\alpha \beta j} (\dot{\alpha}_j - \dot{\beta}_j)(\Omega + \dot{\varphi}_j)],$$

$$L_{\alpha k} = m_{\alpha k}^{vx} \dot{v}_{Cx} + m_{\alpha k}^{vy} \dot{v}_{Cy} + m_{\alpha k}^{\Omega} \dot{\Omega} + \sum_{j=1}^n [m_{\alpha k}^{\varphi j} \ddot{\varphi}_j] + \sum_{j=1}^n [m_{\alpha k}^{\alpha j} \ddot{\alpha}_j] +$$

$$+ \sum_{j=1}^n [m_{\alpha k}^{\beta j} \ddot{\beta}_j] + g_{\alpha k}^{\Omega vx} \Omega v_{Cx} + g_{\alpha k}^{\Omega vy} \Omega v_{Cy} + g_{\alpha k}^{\Omega} \Omega^2 + \quad (12)$$

$$+ \sum_{j=1}^n [g_{\alpha k}^{\Omega \varphi j} (2\Omega \dot{\varphi}_j + \dot{\varphi}_j^2)] + \sum_{j=1}^n [g_{\alpha k}^{\alpha \beta j} (\dot{\alpha}_j - \dot{\beta}_j)(\Omega + \dot{\varphi}_j)],$$

$$L_{\beta k} = m_{\beta k}^{vx} \dot{v}_{Cx} + m_{\beta k}^{vy} \dot{v}_{Cy} + m_{\beta k}^{\Omega} \dot{\Omega} + \sum_{j=1}^n [m_{\beta k}^{\varphi j} \ddot{\varphi}_j] + \sum_{j=1}^n [m_{\beta k}^{\alpha j} \ddot{\alpha}_j] +$$

$$+ \sum_{j=1}^n [m_{\beta k}^{\beta j} \ddot{\beta}_j] + g_{\beta k}^{\Omega vx} \Omega v_{Cx} + g_{\beta k}^{\Omega vy} \Omega v_{Cy} + g_{\beta k}^{\Omega} \Omega^2 + \quad (13)$$

$$+ \sum_{j=1}^n [g_{\beta k}^{\Omega \varphi j} (2\Omega \dot{\varphi}_j + \dot{\varphi}_j^2)] + \sum_{j=1}^n [g_{\beta k}^{\alpha \beta j} (\dot{\alpha}_j - \dot{\beta}_j)(\Omega + \dot{\varphi}_j)].$$

Коэффициенты выражений (8) – (13) с учетом симметрии и антисимметрии приведены в [15].

Для интегрирования с помощью стандартной программы полученная система нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с учетом уравнений (1)-(6) и выражений (7)-(13) записывается в матричном виде

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{N}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{p} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}, \quad (14)$$

где $\mathbf{q} = [u_{Cx} \ u_{Cy} \ \theta_C \ \varphi_1 \ \dots \ \varphi_n \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_n \ \beta_1 \ \dots \ \beta_n]_{(3n+3) \times 1}^T$ – вектор перемещений и углов поворота; $\mathbf{p} = [v_{Cx} \ v_{Cy} \ \Omega \ \dot{\varphi}_1 \ \dots \ \dot{\varphi}_n \ \dot{\alpha}_1 \ \dots \ \dot{\alpha}_n \ \dot{\beta}_1 \ \dots \ \dot{\beta}_n]_{(3n+3) \times 1}^T$ – вектор линейных и угловых скоростей; $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)_{(3n+3) \times (3n+3)}$ – симметричная нелинейная матрица инерции, коэффициенты которой зависят от обобщенных координат; $\mathbf{K} = \mathbf{K}(t)_{(3n+3) \times (3n+3)}$ и $\mathbf{D} = \mathbf{D}(t)_{(3n+3) \times (3n+3)}$ – симметричные матрицы жесткости и демпфирования соответственно; $\mathbf{r} = [\mathbf{p} \ \mathbf{q}]_{(6n+6) \times 1}^T$; $\mathbf{z} = [\Omega v_{Cx} \ \Omega v_{Cy} \ \Omega^2 \ \{2\Omega \dot{\varphi}_m + \dot{\varphi}_m^2\} \ \{(\dot{\alpha}_m - \dot{\beta}_m)(\Omega + \dot{\varphi}_m)\}]_{(2n+3) \times 1}^T$ (m последовательно принимает значения от 1 до n) – вектор нелинейных частей; $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{r}, t)_{(3n+3) \times (2n+3)}$ – матрица нелинейных частей, коэффициенты которой зависят от обобщенных координат, причем квадратная матрица, получающаяся из первых $(n+3)$ строк и столбцов, является антисимметричной; $\mathbf{Q}_{(3n+3) \times 1}$ – вектор правых частей, обусловленный приложенными силами и моментами.

Система уравнений (14) решается в программном комплексе компьютерной алгебры РТС MathCAD 15.0 M045 с помощью стандартной программы решения систем дифференциальных уравнений AdamsBDF, реализующая метод Адамса («нежесткие системы») и метод обратного дифференцирования («жесткие системы») с автоматическим выбором между ними исходя из входных данных.

3. РЕДУЦИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ

Проведем редуцирование полученной системы уравнений движения КА с присоединенной стержневой системой по квазистатическому изгибу, т.е. исключим «быстрые» движения, которые представляют собой изгиб каждого стержня. Для этого:

1. В уравнениях движения (1)-(6) уберем слагаемые, содержащие $\dot{\alpha}_k$ и $\dot{\beta}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$;
2. В выражениях для дифференциальных операторов (8)-(13) уберем слагаемые, содержащие $\ddot{\alpha}_k$ и $\ddot{\beta}_k$, а также $\dot{\alpha}_k - \dot{\beta}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$;
3. В коэффициентах, входящих в выражения для дифференциальных операторов (8)-(13), надо исключить их зависимость от самих углов изгиба α_k и β_k и их разности $\alpha_k - \beta_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ (см. [15]).

В результате из модифицированных уравнений (5) и (6) с учетом преобразованных выражений для $L_{\alpha k}$ и $L_{\beta k}$ (12) и (13) можно получить выражения для углов α_k и β_k через \dot{v}_{Cx} , \dot{v}_{Cy} , $\dot{\Omega}$, $\ddot{\phi}_k$, Ωv_{Cx} , Ωv_{Cy} , Ω^2 , $(2\Omega\dot{\phi}_k + \dot{\phi}_k^2)$, ϕ_k и $\dot{\phi}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, полученные путем решения системы линейных алгебраических уравнений порядка $2n$. Эти выражения будут линейными, так как была исключена зависимость коэффициентов, входящих в выражения для дифференциальных операторов, от углов изгиба. Далее они подставляются в уравнения (1)-(4) и с учетом (8)-(11) формируется запись новой редуцированной системы дифференциальных уравнений движения в матричном виде, аналогично (14)

$$\tilde{\mathbf{M}}\dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{Q}}, \quad (15)$$

где $\tilde{\mathbf{q}} = [u_{Cx} \ u_{Cy} \ \theta_C \ \phi_1 \ \dots \ \phi_n]^T_{(n+3) \times 1}$ – вектор перемещений и углов поворота редуцированной системы; $\tilde{\mathbf{p}} = [v_{Cx} \ v_{Cy} \ \Omega \ \dot{\phi}_1 \ \dots \ \dot{\phi}_n]^T_{(n+3) \times 1}$ – вектор линейных и угловых скоростей редуцированной системы; $\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{r}}, t)_{(n+3) \times (n+3)}$ – нелинейная несимметричная матрица инерции редуцированной системы, коэффициенты которой зависят от обобщенных координат; $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}(t)_{(n+3) \times (n+3)}$ и $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}}(t)_{(n+3) \times (n+3)}$ – несимметричные матрицы жесткости и демпфирования редуцированной системы; $\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{\mathbf{p}} \ \tilde{\mathbf{q}}]^T_{(2n+6) \times 1}$; $\tilde{\mathbf{z}} = [\Omega v_{Cx} \ \Omega v_{Cy} \ \Omega^2 \ {2\Omega\dot{\phi}_m + \dot{\phi}_m^2}]^T_{(n+3) \times 1}$ (m последовательно принимает значения от 1 до n) – вектор нелинейных частей редуцированной системы; $\tilde{\mathbf{N}} = \tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}}, t)_{(n+3) \times (n+3)}$ – матрица нелинейных частей редуцированной системы; $\tilde{\mathbf{Q}}_{(n+3) \times 1}$ – вектор правых частей, обусловленный приложенными силами и моментами, редуцированной системы.

Система уравнений (15) также решается в программном комплексе компьютерной алгебры PTC MathCAD 15.0 M045 с помощью стандартной программы решения систем дифференциальных уравнений AdamsBDF.

4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Рассмотрим КА со стержневой системой, состоящей из $n = 2$ элементов, и приведем несколько примеров расчета с необходимыми пояснениями. Общие

для всех примеров расчета исходные данные: $M_0 = 122,5$ кг, $J_0 = 10$ кг·м², $x_0 = y_0 = 0,35$ м. При $t = 0$ КА находится в покое, если не указано другое.

4.1. Реакция системы на произвольный возмущающий импульс.

Рассмотрим задачу о реакции системы на произвольный возмущающий импульс в двух постановках. Исходные данные: $l_k = 3,0$ м, $m_k = 0,339$ кг/м, $EI_k = 439,8$ Па·м⁴, $\mu_k = 1,0$ кг ($k = 1,2$); $\kappa_0 = 1500$ Н·м, $\nu_0 = 0,10$ Н·м·с, $\kappa_1 = 1200$ Н·м, $\nu_1 = 0,05$ Н·м·с. Нагрузка – $M_C(t) = 150$ Н·м при $0 \leq t \leq 1$ с, $M_C(t) = 0$ при $t > 1$ с; $X_C(t) = 100$ Н при $0 \leq t \leq 1$ с, $X_C(t) = 0$ при $t > 1$ с; $Y_C(t) = 50$ Н при $0 \leq t \leq 1$ с, $Y_C(t) = 0$ при $t > 1$ с. Интегрирование при начальных условиях $\varphi_k = 0$, $\dot{\varphi}_k = 0$, $\alpha_k = 0$, $\dot{\alpha}_k = 0$, $\beta_k = 0$, $\dot{\beta}_k = 0$ ($k = 1,2$) проводилось на интервале $0 \leq t \leq 5$ с при числе разбиений отрезка интегрирования $N = 5000$.

В табл.1 приведены результаты решения задачи в двух постановках путем сравнения одноименных величин в моменты времени $t = 1$ с и $t = 2$ с.

Таблица 1.

Сравнение результатов при действии на систему возмущающего импульса.

	$t = 1$ с		$t = 2$ с	
	Общ. пост.	Ред. пост.	Общ. пост.	Ред. пост.
u_{Cx} , м	0,243	0,243	0,199	0,187
u_{Cy} , м	-0,122	-0,122	-0,177	-0,174
θ_C , рад	1,508	1,507	3,020	3,065
v_{Cx} , м/с	0,587	0,583	-0,106	-0,143
v_{Cy} , м/с	-0,314	-0,309	-0,937	-0,925
Ω , рад/с	-0,545	-0,603	4,596	4,553
φ_1 , рад	-0,532	-0,524	-0,342	-0,379
φ_2 , рад	-0,913	-0,892	-0,920	-0,957
α_1 , рад	0,421	0,414	0,291	0,318
α_2 , рад	0,079	0,073	0,199	0,194
β_1 , рад	-0,272	-0,265	-0,305	-0,312
β_2 , рад	-0,038	-0,033	-0,096	-0,094

Для u_{Cx} , u_{Cy} , θ_C , v_{Cx} , v_{Cy} и Ω значения могут значительно отличаться в момент времени $t = 2$ с, т.е. после снятия управляющего импульса. Для φ_1 , φ_2 , α_1 , α_2 , β_1 и β_2 значения отличаются, в основном, для момента времени $t = 1$ с, т.е. в момент окончания действия возмущающего воздействия.

На рис.3-5 изображены соответственно зависимости φ_1 и φ_2 , α_1 и β_1 , α_2 и β_2 от времени для интервала $0 \leq t \leq 2$ с. Здесь и далее на графиках сплошной линией показана общая постановка задачи, пунктирной линией – редуцированная постановка. На рис.6 показаны линии изгиба всех стержней системы в подвижной системе координат S_{xy} в момент времени $t = 1$ с.

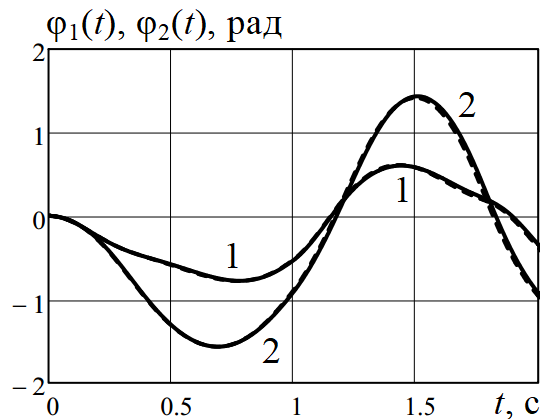


Рис.3. Зависимости φ_1 и φ_2 от t

1 – $\varphi_1(t)$; 2 – $\varphi_2(t)$

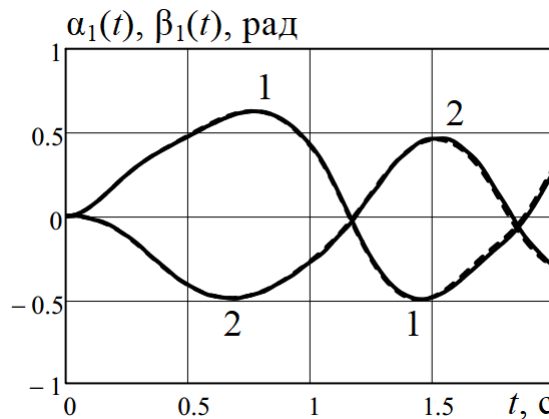


Рис.4. Зависимости α_1 и β_1 от t

1 – $\alpha_1(t)$; 2 – $\beta_1(t)$

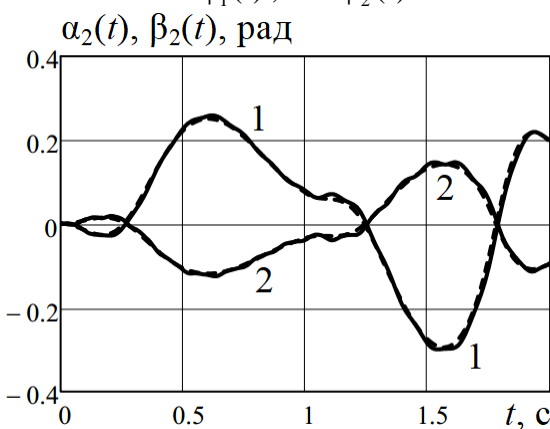


Рис.5. Зависимости α_2 и β_2 от t

1 – $\alpha_2(t)$; 2 – $\beta_2(t)$

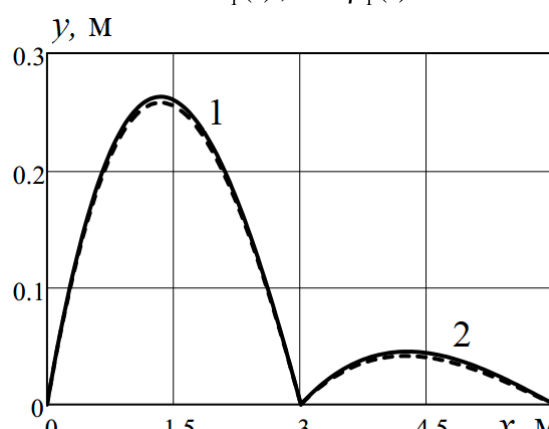


Рис.6. Линии прогибов стержней

1 – стержень $k=1$; 2 – стержень $k=2$

4.2. Развертывание системы за счет центробежных сил.

Здесь и далее (в 4.3) решается задача развертывания стержневой системы, стержни которой в начальный момент времени прижаты друг к другу и ориентированы в направлении оси Sy , а узловые пружины, при их наличии, предварительно напряжены. Начальные условия для стержней при $t=0$ записываются в виде: $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = -\pi/2$, $\dot{\varphi}_k = 0$, $\alpha_k = 0$, $\dot{\alpha}_k = 0$, $\beta_k = 0$, $\dot{\beta}_k = 0$ ($k=1,2$). В раскрытом положении стержни должны быть приближенно параллельны оси Sx , т.е. $\varphi_k \approx 0$, $k=1,2$. Это осуществляется с помощью упруговязких зажимов, которые имитируются увеличением жесткостей в шарнирах до значения 10^7 Н·м и появлением демпфирования с коэффициентом 10 Н·м·с, как только достигаются условия $|\varphi_2 - \varphi_1| < 0,01$ рад или $|\varphi_1| < 0,01$ рад.

Исходные данные: $l_k = 2,0$ м, $m_k = 1,357$ кг/м, $EI_k = 7,037 \times 10^3$ Па·м⁴, $\mu_k = 0,5$ кг ($k=1,2$). Жесткости и вязкости узловых шарниров отсутствуют ($\kappa_k = 0$, $\nu_k = 0$ для $k=0,1$). Внешние силы и моменты, действующие на систему, отсутствуют: $M_c(t) = 0$, $X_c(t) = Y_c(t) = 0$. Интегрирование при начальном условии $\Omega = 1$ рад/с проводилось на интервале $0 \leq t \leq 5$ с при числе разбиений отрезка интегрирования $N = 5000$.

Последовательность и время срабатывания зажимов в общей постановке: $k = 0$ при $t = t_{1f} = 2,903$ с; $k = 1$ при $t = t_{2f} = 4,356$ с. Последовательность и время срабатывания зажимов в редуцированной постановке: $k = 0$ при $t = t_{1r} = 2,903$ с; $k = 1$ при $t = t_{2r} = 4,352$ с.

В табл.2 приведены результаты решения задачи в двух постановках путем сравнения одноименных величин в моменты времени фиксации зажимов $k = 0$ и $k = 1$.

Таблица 2.

Сравнение результатов при разворачивании системы за счет действия центробежных сил.

	Фиксация $k = 0$		Фиксация $k = 1$	
	Общ. пост. $t_{1f} = 2,903$ с	Ред. пост. $t_{1r} = 2,903$ с	Общ. пост. $t_{2f} = 4,356$ с	Ред. пост. $t_{1r} = 4,352$ с
u_{Cx} , м	0,047	0,047	0,047	0,047
u_{Cy} , м	-0,021	-0,021	-0,146	-0,146
θ_C , рад	3,450	3,450	3,928	3,928
v_{Cx} , м/с	0,043	0,043	0,042	0,042
v_{Cy} , м/с	-0,071	-0,095	-0,071	-0,093
Ω , рад/с	1,234	1,234	0,385	0,397
φ_1 , рад	$-4,090 \times 10^{-4}$	$-4,076 \times 10^{-4}$	-0,012	-0,014
φ_2 , рад	-1,841	-1,841	-0,011	-0,014
α_1 , рад	$6,486 \times 10^{-5}$	$5,701 \times 10^{-5}$	0,012	0,014
α_2 , рад	$1,110 \times 10^{-5}$	$7,481 \times 10^{-6}$	$-1,536 \times 10^{-3}$	$-9,075 \times 10^{-4}$
β_1 , рад	$-6,794 \times 10^{-5}$	$-6,027 \times 10^{-5}$	$-2,584 \times 10^{-3}$	$-6,202 \times 10^{-3}$
β_2 , рад	$-9,139 \times 10^{-6}$	$-5,760 \times 10^{-6}$	$1,668 \times 10^{-3}$	$6,987 \times 10^{-4}$

Как видно из табл.2 основные параметры движения системы остаются практически неизменными при применении двух подходов к решению задачи. Различия по значениям параметров наблюдаются лишь при вычислении углов изгиба α_1 и β_1 , α_2 и β_2 , хотя общий характер зависимостей $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $\alpha_2(t)$ и $\beta_2(t)$ остается неизменным.

На рис.7 и 8 показаны линии изгиба всех стержней системы в подвижной системе координат S_{xy} в момент времени фиксации зажимов $k = 0$ и $k = 1$, соответственно. Общий характер прогиба стержней при переходе от общей постановки к редуцированной сохраняется.

Следует отметить, что интегрирование уравнений движения численными методами с помощью стандартной программы AdamsBDF в пакете MathCad по редуцированной постановке идет в среднем 3-4 раза быстрее по времени работы алгоритма, чем по общей постановке. Это объясняется тем, что из системы убираются «быстрые» движения, которые существенно замедляют процесс интегрирования системы дифференциальных уравнений.

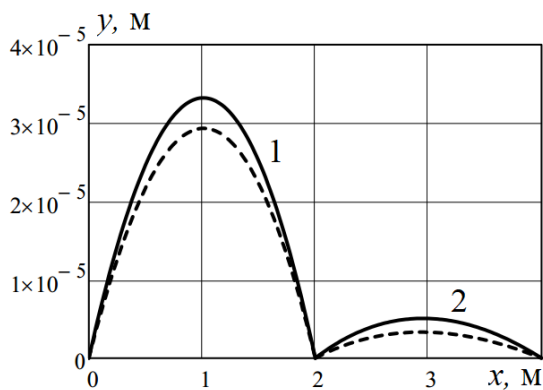


Рис. 7. Линии прогибов стержней
1 – стержень $k = 1$; 2 – стержень $k = 2$

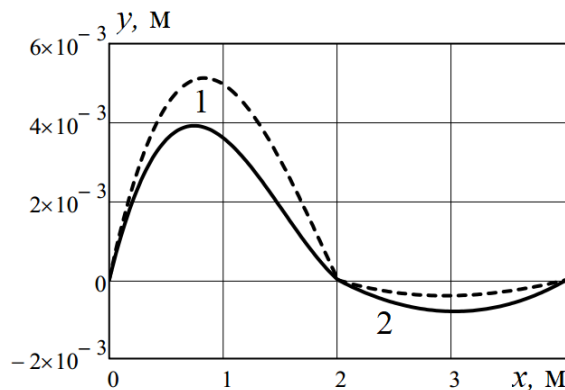


Рис. 8. Линии прогибов стержней
1 – стержень $k = 1$; 2 – стержень $k = 2$

4.3. Развертывание системы за счет инерционных сил.

Исходные данные: $l_k = 2,0$ м, $m_k = 1,357$ кг/м, $EI_k = 7,037 \times 10^3$ Па·м⁴, $\mu_k = 0,5$ кг ($k = 1,2$). Жесткости и вязкости узловых шарниров отсутствуют ($\kappa_k = 0, \nu_k = 0$ для $k = 0,1$). Внешние силы и моменты, действующие на систему: $M_C(t) = 0, X_C(t) = -70$ Н, $Y_C(t) = 0$. Интегрирование системы проводилось на интервале $0 \leq t \leq 5$ с при числе разбиений отрезка интегрирования $N = 5000$.

Последовательность и время срабатывания зажимов в общей постановке: $k = 0$ при $t = t_{1f} = 3,397$ с; $k = 1$ при $t = t_{2f} = 3,807$ с. Последовательность и время срабатывания зажимов в редуцированной постановке: $k = 0$ при $t = t_{1r} = 3,397$ с; $k = 1$ при $t = t_{2r} = 3,805$ с.

В табл.3 приведены результаты решения задачи в двух постановках путем сравнения одноименных величин в моменты времени фиксации зажимов $k = 0$ и $k = 1$. Как видно из табл.3, как и в прошлом расчетном случае, основные параметры движения системы остаются практически неизменными при применении двух подходов к решению задачи. Различия по значениям параметров наблюдаются лишь при вычислении углов изгиба α_1 и β_1, α_2 и β_2 , хотя общий характер зависимостей $\alpha_1(t), \beta_1(t), \alpha_2(t)$ и $\beta_2(t)$ остается неизменным.

Таблица 3.

Сравнение результатов при развертывании системы за счет действия инерционных сил.

	Фиксация $k = 0$		Фиксация $k = 1$	
	Общ. пост. $t_{1f} = 3,397$ с	Ред. пост. $t_{1r} = 3,807$ с	Общ. пост. $t_{2f} = 3,397$ с	Ред. пост. $t_{1r} = 3,805$ с
$u_{Cx},$ м	-3,247	-3,247	-5,087	-5,071
$u_{Cy},$ м	0,113	0,113	0,056	0,057
$\theta_C,$ рад	0,012	0,012	-0,238	-0,238
$v_{Cx},$ м/с	-1,873	-1,873	-2,025	-2,026
$v_{Cy},$ м/с	0,051	0,051	-0,467	-0,466
$\Omega,$ рад/с	-0,088	-0,088	-1,026	-1,042
$\varphi_1,$ рад	$-4,321 \times 10^{-4}$	$-4,306 \times 10^{-4}$	$-7,58 \times 10^{-3}$	$-9,939 \times 10^{-3}$

φ_2 , рад	-0,752	-0,752	$-7,679 \times 10^{-3}$	-0,010
α_1 , рад	$5,891 \times 10^{-5}$	$7,323 \times 10^{-5}$	$7,57 \times 10^{-3}$	$9,927 \times 10^{-3}$
α_2 , рад	$7,883 \times 10^{-5}$	$7,841 \times 10^{-5}$	$-9,905 \times 10^{-4}$	$-6,61 \times 10^{-4}$
β_1 , рад	$-6,829 \times 10^{-5}$	$-8,258 \times 10^{-5}$	$-2,354 \times 10^{-3}$	$-4,514 \times 10^{-3}$
β_2 , рад	$-6,014 \times 10^{-5}$	$-6,037 \times 10^{-5}$	$1,09 \times 10^{-3}$	$5,089 \times 10^{-4}$

На рис.9 и 10 показаны линии изгиба всех стержней системы в подвижной системе координат S_{xy} в момент времени фиксации зажимов $k=0$ и $k=1$, соответственно. Общий характер прогиба стержней при переходе от общей постановки к редуцированной сохраняется, как и в предыдущем расчетном случае.

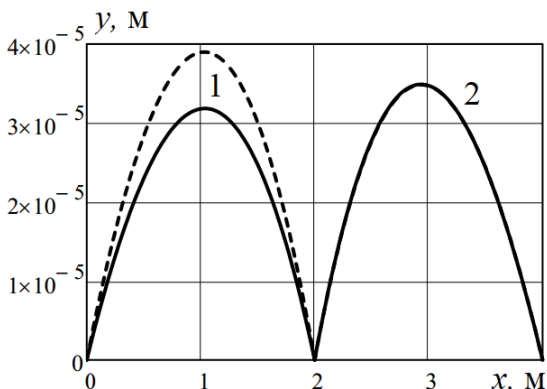


Рис.9. Линии прогибов стержней
1 – стержень $k=1$; 2 – стержень $k=2$

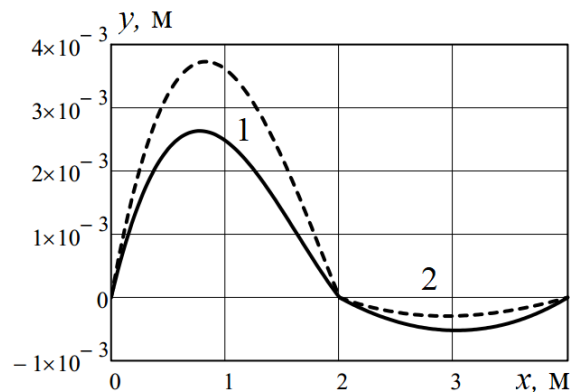


Рис.10. Линии прогибов стержней
1 – стержень $k=1$; 2 – стержень $k=2$

В этом расчетном случае, как и в прошлом, время интегрирования системы дифференциальных уравнений в редуцированной постановке меньше в 3-4 раза по сравнению с общей постановкой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Рассмотрена нелинейная динамика плоской стержневой системы, состоящей из упругих нерастяжимых стержней, связанных между собой на концах упруговязкими узловыми шарнирами.

2. Представлена постановка задачи, которая получается путем редуцирования исходной системы уравнений по квазистатическому изгибу – из уравнений движения исключаются «быстрые» движения, которые представляют собой изгиб каждого стержня, т.е. первые и вторые производные от углов между касательной к изогнутой оси стержня и его недеформированной осью.

3. Рассмотрены примеры расчета с необходимыми сравнениями между двумя подходами: задача о реакции стержневой системы на произвольный возмущающий импульс; задача о развертывании стержневой системы из одного положения в другое при помощи включения упруговязких зажимов, интегрированных в узловые шарниры, за счет центробежных и инерционных сил.

4. Основным преимуществом решения задачи в редуцированной постановке по квазистатическому изгибу является в 3-4 раза уменьшенное время интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений движения

при сохранении приемлемой точности определениях всех характеристик движения или развертывания рассматриваемой системы, состоящей из КА и стержневой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Светлицкий В.А. *Механика стержней. Часть 2. Динамика.* – М.: Высшая школа, 1987. – 304 с.
2. Светлицкий В.А. *Механика абсолютно гибких стержней.* – М.: Изд-во МАИ, 2001. – 432 с.
3. Докучаев Л.В. *Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами.* – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
4. Шклярчук Ф.Н. *Нелинейные и линеаризованные уравнения движения упругих космических конструкций // Изв. РАН. МТТ.* – 1996. – №1. – С.161-175.
5. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика упругих управляемых конструкций.* – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 328 с.
6. Паничкин В.И. *Математическое моделирование динамики раскрытия многостворчатой солнечной батареи // Изв. РАН. МТТ.* – 1992. – №1. – С.177-180.
7. Паничкин В.И. *Математическое моделирование динамики деформирования многостворчатой солнечной батареи в процессе раскрытия // Изв. РАН. МТТ.* – 1992. – №4. – С.183-190.
8. Крылов А.В., Чурилин С.А. *Моделирование раскрытия солнечных батарей различных конфигураций // Вестник МГТУ. Серия Машиностроение.* – 2011. – №1. – С.106-112.
9. Бакулин В.Н., Борзых С.В., Ильясова И.Р. *Математическое моделирование процесса раскрытия многосворчатых солнечных батарей // Вестник МАИ.* – 2011. – Т.18. – №3. – С.295-302.
10. Алпатов А.П., Белицкий В.В. и др. *Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями.* – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 560 с.
11. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. *Особенности динамики управляемого функционирования космических тросовых систем на круговых и эллиптических орбитах.* – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 160 с.
12. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. *Космические тросовые системы.* – М.: Альфа-М, 2014. – 208 с.
13. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика плоского движения тела с системой последовательно соединенных упруговязкими шарнирами гибких нерастяжимых стержней при больших углах поворота // Изв. РАН. МТТ.* – 2011. – №2. – С.109-117.
14. Русских С.В. *Нелинейная динамика космического аппарата с присоединенной упругой стержневой системой // Изв. ВУЗов. Машиностроение.* – 2017. – №7. – С.81-89.
15. Русских С.В. *Плоская нелинейная задача динамики трансформируемой упругой стержневой системы, присоединенной к космическому аппарату // Изв. ВУЗов. Машиностроение.* – 2017. – №11. – С.90-101.

REFERENCES

1. Svetlitskii V.A. *Mekhanika sterzhnei. Chast' 2. Dinamika* [Mechanics of rods. Part 2. Dynamics]. Moskva, Vysshaia Shkola, 1987, 304 p.
2. Svetlitskii V.A. *Mekhanika absolutno gibkikh sterzhnei* [The mechanics of absolutely flexible rods]. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta, 2001, 432 p.
3. Dokuchaev L.V. *Nelineinaia dinamika letatel'nykh apparatov s deformiruemymi elementami* [Nonlinear dynamics of aircraft with deformable elements]. Moskva, Mashinostroenie, 1987, 232 p.
4. Shkliarchuk F.N. *Nelineinye i linearizovannye uravneniia dvizheniia uprugikh kosmicheskikh konstruktssii* [Nonlinear and linearized equations of motion of elastic cosmic structures]. Izvestiia Rossiiskoi Akademii Nauk, Mekhanika Tverdogo Tela, 1996, No.1, Pp.161-175.
5. Grishanina T.V., Shkliarchuk F.N. *Dinamika uprugikh upravliaemykh konstruktssii* [Dynamics of elastic controlled structures]. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta, 2007, 328 p.
6. Panichkin V.I. *Matematicheskoe modelirovanie dinamiki raskrytiia mnogostvorchatoi solnechnoi batarei* [Mathematical modeling of the dynamics of the expansion of a multi-leaf solar battery]. Izvestiia Rossiiskoi Akademii Nauk, Mekhanika Tverdogo Tela, 1992, No.1, Pp.177-180.
7. Panichkin V.I. *Matematicheskoe modelirovanie dinamiki deformirovaniia mnogostvorchatoi solnechnoi batarei v protsesse raskrytiia* [Mathematical modeling of the deformation dynamics of a multi-leaf solar battery in the process of unfolding]. Izvestiia Rossiiskoi Akademii Nauk, Mekhanika Tverdogo Tela, 1992, No.4, Pp.183-190.
8. Krylov A.V., Churilin S.A. *Modelirovanie raskrytiia solnechnykh batarei razlichnykh konfiguratsii* [Modeling of the disclosure of solar cells of various configurations]. Vestnik Moskovskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta, Seriya Mashinostroenie, 2001, No.1, Pp.106-112.
9. Bakulin V.N., Borzykh S.V., Il'iasova I.R. *Matematicheskoe modelirovanie protsessa raskrytiia mnogovertovnykh solnechnykh batarei* [Mathematical modeling of the process of opening multi-tier solar cells]. Vestnik Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta, 2011, Vol.18, No.3, Pp.295-302.
10. Alpatov A.P., Belitskii V.V. i dr. *Dinamika kosmicheskikh sistem s trosovymi i sharnirnymi soedineniiami* [Dynamics of space systems with cable and hinged joints]. Moskva-Izhevsk, NITs Reguliarnaia i khaoticheskaiia dinamika, 2007, 560 p.
11. Ivanov V.A., Kupreev S.A., Ruchinskii V.S. *Osobennosti dinamiki upravliaemogo funktsionirovaniia kosmicheskikh trosovykh sistem na krugovykh i ellipticheskikh orbitakh* [Features of the dynamics of the controlled functioning of space rope systems on circular and elliptical orbits]. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta, 2016, 160 p.
12. Ivanov V.A., Kupreev S.A., Ruchinskii V.S. *Kosmicheskie trosovye sistemy* [Space rope systems]. Moskva, Al'fa-M, 2014, 208 p.
13. Grishanina T.V., Shkliarchuk F.N. *Dinamika ploskogo dvizheniia tela s sistemoi posledovatel'no soedinennykh uprugoviazkimi sharnirami gibkikh nerastiazhimykh sterzhnei pri bol'shikh uglakh povorota* [Dynamics of a plane motion of a body with a system of flexible inextensible rods connected in series by elastic-hinged hinges at

- large angles of rotation*]. *Izvestiia Rossiiskoi Akademii Nauk, Mekhanika Tverdogo Tela*, 2011, No.2, Pp.109-117.
14. Russkikh S.V. *Nelineinaia dinamika kosmicheskogo apparata s prisoedinennoi uprugoi sterzhnevoi sistemoi [Nonlinear dynamics of a spacecraft with an attached elastic rod system]*. *Izvestiia VUZov, Seria Mashinostroenie*, 2017, No.7, Pp.81-89.
 15. Russkikh S.V. *Ploskaia nelineinaia zadacha dinamiki transformiruemoi uprugoi sterzhnevoi sistemy, prisoedinennoi k kosmicheskomu apparatu [A planar nonlinear problem of the dynamics of a transformable elastic rod system attached to a spacecraft]*. *Izvestiia VUZov, Seria Mashinostroenie*, 2017, No.11, Pp.90-101.

Поступила в редакцию 24 апреля 2018 года

Сведения об авторе:

Русских Сергей Владимирович – к.ф.-м.н., доц., Кафедра «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: sergey.russkih@rambler.ru