

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ЭЛЕМЕНТАХ СТРУКТУРЫ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ВИСКЕРИЗОВАННЫМИ ВОЛОКНАМИ*

Лурье С.А.^{1,2}, Рабинский Л.Н.², Кривень Г.И.^{2,3}, Лыкосова Е.Д.¹

¹ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

²ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет), г. Москва, Россия

³ПАО Радиофизика, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Исследуется напряженное состояние модифицированных композитных материалов, армированных вискеризованными волокнами, для случая одноосного растяжения. Модифицированный композитный материал содержит волокна, представляющие собой многофазный материал, таким образом композитный материал состоит из трех фаз: а) волокно, б) межфазный вискеризованный слой, образованный на поверхности волокна в) матрица. Изучается напряженное состояние в каждой из фаз такого волокнистого композита. Рассматривается два типа волокнистых композитов содержащих эпоксидную матрицу. В первом из них базовое углеродное волокно марки Т-650 окружено межфазным слоем, состоящим из углеродных нанотрубок и эпоксидной матрицы. Во втором базовое углеродное волокно марки IM7 окружено межфазным слоем, состоящим из нанопроволок оксида цинка и эпоксидной матрицы. Исследуется напряженное состояния в каждой из фаз модифицированного волокнистого композита для оценки прочности композита и сравнения его прочностных характеристик с классическим композиционным материалом из углеродных волокон и эпоксидной матрицы.

Исследование проводилось в несколько этапов, первым из которых было определение эффективных свойств межфазных слоев, обладающих цилиндрической изотропией и образованных матрицей, наполненной вискерсами или нанотрубками. В результате волокнистый композит рассматривается как составная система с трансверсально-изотропными свойствами в каждой из фаз: волокно и межфазный слой являются трансверсально-изотропными, а матрица является изотропной. Далее для каждой фазы двух композиционных материалов исследовались радиальное, осевое и окружное напряжения. Результаты исследования показали, что при одноосном растяжении прочность композита контролируется не прочностью волокна или матрицы, а прочностью вискеризованного межфазного слоя.

Ключевые слова: модифицированные волокнистые композиционные материалы; вискеризованные волокна

STRESS STATE IN STRUCTURAL ELEMENTS OF MODIFIED FIBROUS COMPOSITE MATERIALS WITH VISCOUS FIBERS

Lurie S.A.^{1,2}, Rabinskiy L.N.², Kriven G.I.^{2,3}, Lykosova E.D.¹

¹Institute of Applied Mechanics (RAS), Moscow, Russia

²Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

³PJSC Radiofizika, Moscow, Russia

* Работа в части численного моделирования и анализа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект №17-79-20105), в части построения модели работа выполнена в рамках государственного задания (номер гос. регистрации темы АААА-А17-117032010137-0).

ABSTRACT

The stress state of modified composite materials reinforced with whiskered fibers is investigated for the case of uniaxial tension. The modified composite material includes fibers that are a multiphase material, so the composite material composes of three phases: а) base fiber, б) bristled interphase layer is grown on top of the surface of fiber, в) matrix. The stress state in each phase of such a fiber composite material is studied. Two types of fiber composite material consisting of a matrix are considered. The first type is a basic carbon fiber T-650 coated with an interphase layer, where the interphase layer contain carbon nanotubes and epoxy matrix. The second type is a basic carbon fiber IM7 coated with an interphase layer, where the interphase layer contain zinc oxide nanowires and epoxy matrix. The stress state in each of the phases of the modified fibrous composite is examined to evaluate the strength and to compare the strength characteristics of the modified composite with the strength characteristics of the classical composite material consisting of carbon fibers and an epoxy matrix.

The study was conducted in several stages. First, effective properties of interphase layers formed by a matrix filled with whiskers or nanotubes were determined. Interphase layers have cylindrical isotropy. As a result, the fibrous composite is considered as a composite system with a transversely isotropic property in each phase: fiber and interphase layer are transversely isotropic, matrix is isotropic.

Secondly, radial, axial and circumferential stresses were investigated for each of the phases of two composite materials. The results of the studies showed that in case of uniaxial tension, the strength of the composite is controlled not by the strength of the fiber or the matrix, but is controlled by the strength of the viscous interphase layer.

Keywords: modified fibrous composite materials; viscous fibers

ВВЕДЕНИЕ

Механические свойства композитов контролируются условиями контакта между волокном и матрицей (т.е. характеристиками интерфейса) в композите [1,2]. В [3,4] разработаны различные методики для повышения качества интерфейса, среди которых наиболее распространенными являются: модификация поверхности волокна, улучшение химических взаимодействий, и/или добавление третьей фазы (межфазного слоя) между волокном и матрицей. Идеи, лежащие в основе этих методов, заключаются в улучшении межфазных адгезионных свойств, а также в увеличении площади поверхности волокна для обеспечения более эффективной передачи нагрузок между волокном и матрицей так, чтобы сдвиговые свойства композитов могли быть значительно улучшены без потери прочности композита.

Для образования межфазного слоя использовались вискеризованные покрытия, связанные, как правило, с созданием слоя из микро и нанопроволок оксида цинка, графитовых вискерсов [5-7].

Такие покрытия, часто оказывались неоднородными и слоистыми в силу технологических причин. Последние несколько десятилетий назад были созданы углеродные волокна, вискеризованные графитовыми микровискерсами. Одним из серьезных недостатков этой технологии заключалось в том, что механические процессы, которые породили микровискерсы на поверхности волокон, существенно уменьшали прочность на растяжение базовых волокон, и поэтому, прочность композитов в направлении армирования значительно уменьшалась [8]. После первых, не очень удачных результатов, в этой области, исследования в рамках подобных технологий в течение достаточно долгого периода были приостановлены.

В последние 10-15 лет исследования процессов вискеризации углеродных волокон возобновились на основе новых технологий. Например, в настоящее время для создания вискеризованного слоя на поверхности углеродного волокна широко используются углеродные нанотрубки (УНТ), которые стали вполне доступными с 1990-х годов. Такие волокна, выращенные на их поверхности УНТ, именуется «fuzzy fibers». [4,9]. В начальный период развития технологий получения вискеризованных волокон с углеродными нанотрубками удавалось получить некоторое увеличение сдвиговой прочности, однако при этом наблюдалось существенное снижение жесткости и прочности на растяжение базовых углеродных волокон, что было связано с высокой температурой, используемой в процессах выращивания нанотрубок на поверхности волокна. Тем не менее, Штейнер и др. [10] недавно объявил, что они успешно разработали новые методики производства волокон «fuzzy fibers» без повреждения базового волокна.

Далее, Лин и др. [5] и Галан и др. [7] получили новую подобную систему волокон с межфазным слоем. В их работах создаются углеродные волокна, вискеризованные нанопроволоками оксида цинка (ZnO). Авторы работ [5,7] описывают область, содержащую нанопроволоки и матрицу как межфазный слой между волокном и матрицей, а также два интерфейса – волокно-ZnO и ZnO-матрица. Эти интерфейсы по сравнению с начальным интерфейсом волокно-матрица обладают более высокой прочностью. Сообщалось, что интерфейс волокно- ZnO имеет лучшую адгезионную прочность чем интерфейс волокно-матрица, а интерфейс ZnO-матрица обеспечивает лучшее адгезионное взаимодействие, не только за счет лучшей адгезии, но также и из-за большей поверхности контакта. Поэтому композит на их основе становится более прочным материалом. Кроме этого, описанный тип волокнистой системы, согласно [7], не теряет прочностных свойств после роста нанопроволок. А как отмечается в работе [11], встраивание в матрицу вискеризованных волокон приводит к увеличению прочности композита на сдвиг на 200-400% (в зависимости от эффективных свойств углеродных волокон и эпоксидной матрицы).

Таким образом, практическая реализация этих идей привела к созданию нового класса современных многофункциональных композитов. Согласно обзору [12], многофункциональные композиты теперь предназначены для одновременного повышения прочности, жесткости, ударной вязкости, усталости, демпфирования и теплопроводности.

Моделирование композиционных материалов содержит фундаментальную проблему, так как в макромасштабе они считаются однородными континуумами, а в микромасштабе – существенно неоднородными, т.е., компоненты или фазы композита различаются по свойствам, и между ними существует явная граница раздела (интерфейс или межфазный слой) [1]. В связи с этим, эффективные свойства композиционных материалов в целом зависят от характеристик фаз композитов (свойств матрицы, объемного содержания волокон, их формы, размера, распределения и ориентации), структуры и свойств интерфейса-межфазного слоя и особенностей внутренних взаимодействий (когезионных и адгезионных эффектов) [2]. Таким образом, для определения макроскопических свойств композиционных материалов важную роль играет микромеханика. Наибольшее развитие микромеханические теории композиционных материалов получили после 1960-х г., и это связано с значительными работами Эшелби (1956, 1957) [13,14].

Одной из основных задач микромеханики является более полный и детальный учет локальных полей (напряжений и деформаций) в фазах, уточнение оценок их влияния на макрохарактеристики при нагружении модифицированного композита. Такое знание особенно важно для описания прочности композиционного материала.

На данный момент большинство работ ориентировано на исследование эффективных свойств композиционных материалов. Существует несколько исследований, в которых анализируются эффективные механические свойства вискеризованных волокнистых композитов с учетом характеристик вискерсов. Например, Гузь и др. [11,15] исследовали эффекты плотности графитовых вискерсов на эффективные упругие свойства конкретного вискеризованного углеродного волокнистого композита, у которого есть четыре слоя – базовое волокно, слой покрытия, вискеризованный межфазный слой и матрица. В целом, эффективные свойства найдены путем процедуры двухэтапной гомогенизации. Свойства вискеризованного межфазного слоя в первом этапе определяются осреднением Фойхта и Рейса, а во втором этапе определяются окончательные свойства композита путем осреднения решений полученных методом комплексной переменной потенциала Мухелишвили [16-18]. В работе [19] представлена модель определения эффективных свойств волокнистых композитов с вискеризованными волокнами, основанная на процедуре осреднения по методу трех фаз Эшелби. В [20] дается сравнение результатов моделирования эффективных свойств композита, армированного волокнами с дополнительной структурой в виде вискеризованных волокон, полученных с помощью метода Эшелби с результатами, найденными методом комплексных потенциалов. Показано, что метод Эшелби представляется более точным фактически для всего возможного диапазона объемных содержаний армирующих волокон.

В настоящей работе исследуется напряженное состояние двух композиционных материалов, которые имеют три слоя или фазы (волокно, межфазный слой и матрицу) в случае одноосного растяжения. Для каждой фазы исследовались радиальное, осевое и угловое напряжения. Рассматривалось два типа композиционных материалов. Первый из композиционных материалов имеет следующие три слоя: 1) твердое базовое углеродное волокно марки Т-650, 2) вискеризованный межфазный слой, который состоит из углеродных нанотрубок, контактирующих с эпоксидной матрицей, и 3) эпоксидная матрица. Второй из композиционных материалов имеет следующие три слоя: 1) твердое базовое углеродное волокно марки IM7, 2) вискеризованный межфазный слой, который состоит из нанопроволок оксида цинка, и 3) эпоксидная матрица.

Предполагается также, что использование углеродных нанотрубок для образования межфазного слоя является более эффективным так как в таких структурах обеспечивается высокое отношение площади поверхности к объему вискерсов [21], что при хорошей адгезии приводит к более высоким эффективным свойствам.

Для определения напряженного состояния композиционных материалов, армированных вискеризованными волокнами, находились их эффективные свойства по модели, описанной в работе [19]. При моделировании эффективных свойств таких композитов, мы считаем, что волокнистый композит с точки зрения эффективных свойств является трансверсально-изотропной структурой с плоскостью изотропии поперек волокна. Кроме того, принято, что вискеризованные межфазные слои в матрице не пересекаются друг с другом,

и вискерсы выращены перпендикулярно к поверхности базового волокна. Поэтому эффективные свойства межфазного слоя обладают свойствами цилиндрической трансверсально изотропии, с осью, совпадающей с радиальной координатой (направлением вискерсов на поверхности волокон).

1. КОМПОЗИТЫ С ВИСКЕРИЗОВАННЫМИ ВОЛОКНАМИ (ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ)

На рис.1 показан вискеризованный волокнистый композит для однонаправленного монослоя. Для простоты, композиционная структура состоит из двух компонентов и определяется с одной стороны вискеризованным волокном, а с другой – полимерной матрицей. Из-за наличия микро- или нановолокон (вискерсов или щетин), такой композит имеет дополнительный межфазный слой между базовым волокном и матрицей, и поэтому, такие материалы можно отнести к волокнистым многофазным композитам. Считаем, что наш композит имеет только три слоя или фазы (т.е. $N=3$, где N – число слоев в композите).

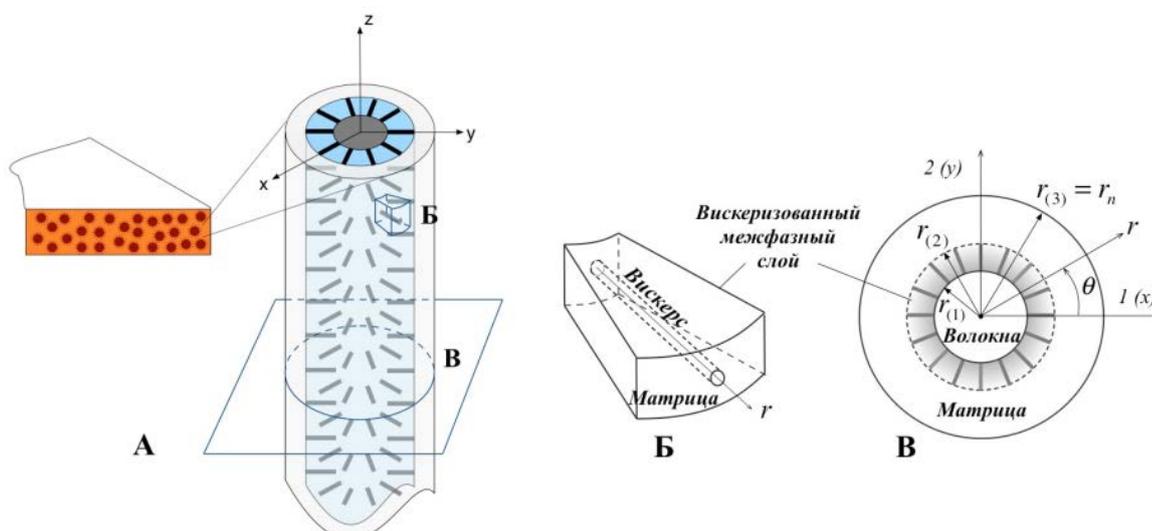


Рис.1. а) однонаправленный вискеризованный волокнистый композит; б) ячейка вискеризованного межфазного слоя; в) ячейка вискеризованного волокнистого композита.

В качестве материалов, напряженные состояния которых оценивались, рассматривались два различных однонаправленных вискеризованных волокнистых композита, один из которых состоит из углеродных волокон марки Т-650, вискеризованных углеродными нанотрубками (УНТ), а другой состоит из углеродных волокон марки IM7, вискеризованных нанопроволоками оксида цинка (ZnO). Для композитной структуры из углеродных волокон марки Т-650, вискеризованных углеродными нанотрубками, известными являются: диаметр волокна – 5 мкм, длина и диаметр вискерса – 2 мкм и 0,00055 мкм, соответственно. Для композитной структуры из углеродных волокон марки IM7, вискеризованных нанопроколками оксида цинка, известными являются: диаметр волокна – 5 мкм, длина и диаметр вискерса – 2 мкм и 0,05 мкм соответственно. Поверхности волокон окружены вискерсами со средней плотностью (плотность – 84,4%) и объемной долей вискерсов в вискеризованном межфазном слое – 40%. Матрица и вискерсы считаются изотропными. Углеродные волокна являются трансверсально-

изотропными с плоскостью изотропии поперек волокна. Механические характеристики композитов 1 и 2 даны в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1.

Параметры композита 1.

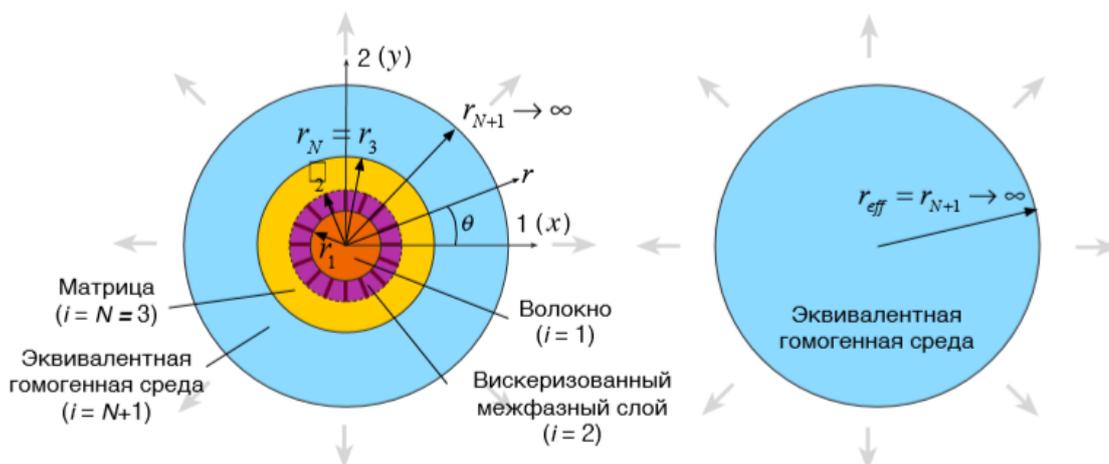
Материалы Параметры	Фаза		
	Базовое волокно	Вискерс	Матрица
	Углеродное Т-650	УНТ	Эпоксидная
- Продольный модуль Юнга, E_L (ГПа)	241	1100	3
- Поперечный модуль Юнга, E_T (ГПа)	14,5	-	-
- Модуль продольного сдвига, μ_L (ГПа)	22,8	-	-
- Модуль поперечного сдвига, μ_T (ГПа)	4,8	-	-
- Коэффициент Пуассона ν_{LT}	0,27	0,14	0,3

Таблица 2.

Параметры композита 2.

Материалы Параметры	Фаза		
	Базовое волокно	Вискерс	Матрица
	Углеродное IM7	ZnO	Эпоксидная
- Продольный модуль Юнга, E_L (ГПа)	256,76	140	2,9
- Поперечный модуль Юнга, E_T (ГПа)	25,51	-	-
- Модуль продольного сдвига, μ_L (ГПа)	22,06	-	-
- Модуль поперечного сдвига, μ_T (ГПа)	9,25	-	-
- Коэффициент Пуассона ν_{LT}	0,289	0,35	0,3

Напряженное состояние в каждом из трех слоев для двух композитных материалов нормировалось на эффективный модуль Юнга для изучения напряженного состояния.



а) среда с включениями (неоднородный композит – *RVE*) б) среда без включений (эффективный композит – *eff*)

Рис.2. а) ячейка вискеризованного волокнистого композита, б) ячейка эффективного композита (гомогенизированный композит).

Для нахождения эффективного модуля Юнга использовался самосогласованный метод трех фаз связанный с использованием интегральной формулы Эшелби [22]. Кристенсен и Ло [23] показали, что этот метод позволяет найти все необходимые эффективные константы, включающие продольные и поперечные модули Юнга и сдвига, объемный модуль плоской деформации и коэффициенты Пуассона из решения задач в плоскости изотропии и в перпендикулярной к ней плоскости. На рис.2 представлены ячейки вискеризованного волокнистого композита по методу самосогласованного поля Эшелби и его эффективного композита.

2. МОДЕЛЬ МЕЖФАЗНОГО СЛОЯ

Чтобы получить эффективные свойства композита, необходимо сначала найти эффективные свойства вискеризованного слоя. В реальности этот слой демонстрирует ортотропное поведение (радиальный тип структуры [24]) и в то же время, имеет градиентные свойства по длине вискерсов (см. рис.1б). Тем не менее, мы полагаем в дальнейшем, что эта фаза соответствует трансверсально-изотропному материалу с плоскостью изотропии поперек вискерсов (т.е. ось симметрии направлена вдоль направления оси *r*) и ее свойства являются постоянными по длине вискерсов – цилиндрическая ортотропия [11,15,25,26]. Последнее упрощение считается разумным с учетом того, что длина вискерсов довольно мала [11,15].

Эффективные свойства вискеризованного межфазного слоя определяются по известным формулам метода трех фаз, приведенных в работе [22] для двухфазного композита

продольный модуль Юнга E_{11}^{eff}

$$E_{11}^{eff} = c_b E_b + (1 - c_b) E_m + \frac{4c_b (1 - c_b) (v_b - v_m)^2 \mu_m}{(1 - c_b) \mu_m / (k_b + \mu_b / 3) + c_b \mu_m / (k_m + \mu_m / 3) + 1}, \quad (1)$$

коэффициент Пуассона (вдоль волокон) v_{12}^{eff}

$$v_{12}^{eff} = c_b v_b + (1 - c_b) v_m + \frac{c_b (1 - c_b) (v_b - v_m) (\mu_m / (k_m + \mu_m / 3) - \mu_m / (k_b + \mu_b / 3))}{(1 - c_b) (\mu_m / (k_b + \mu_b / 3)) + c_b (\mu_m / (k_m + \mu_m / 3)) + 1}, \quad (2)$$

модуль продольного сдвига μ_{12}^{eff}

$$\frac{\mu_{12}^{eff}}{\mu_m} = \frac{\mu_b (1 + c_b) + \mu_m (1 - c_b)}{\mu_b (1 - c_b) + \mu_m (1 + c_b)}, \quad (3)$$

объемный модуль плоской деформации K_{23}^{eff}

$$K_{23}^{eff} = k_m + \frac{\mu_m}{3} + \frac{c_b}{1/(k_b - k_m + \frac{1}{3}(\mu_b - \mu_m)) + (1 - c_b)/(k_m + 4\mu_m/3)}. \quad (4)$$

где: c_b – объемная доля включения (вискерсов) в межфазном слое, E_b – модуль Юнга вискерса, E_m – модуль Юнга матрицы, ν_b – коэффициент Пуассона вискерса, ν_m – коэффициент Пуассона матрицы, μ_b – модуль сдвига вискерса, μ_m – модуль сдвига матрицы, k_b – объемный модуль вискерса, k_m – объемный модуль матрицы.

Модуль поперечного сдвига μ_{23}^{eff} определяется как действительный корень уравнения

$$A \left(\frac{\mu_{23}^{eff}}{\mu_m} \right)^2 + 2B \left(\frac{\mu_{23}^{eff}}{\mu_m} \right) + C = 0, \quad (5)$$

где $\eta = 3 - 4\nu$ и

$$\begin{aligned} A &= 3c_b(1 - c_b)^2 \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} - \eta_b \right) + \\ &+ \left[\frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m + \eta_b \eta_m - \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m - \eta_b \right) c_b^3 \right] \left[c_b \eta_m \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) - \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m + 1 \right) \right], \\ B &= -3c_b(1 - c_b)^2 \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\eta_m \frac{\mu_b}{\mu_m} + \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) c_b + 1 \right] \left[(\eta_m - 1) \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b \right) - \right. \\ &\left. - 2 \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m - \eta_b \right) c_b^3 \right] + \frac{c_b}{2} (\eta_m + 1) \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) \left[\frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b + \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m - \eta_b \right) c_b^3 \right], \\ C &= 3c_b(1 - c_b)^2 \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b \right) + \\ &+ \left[\eta_m \frac{\mu_b}{\mu_m} + \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) c_b + 1 \right] \left[\frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b + \left(\frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m - \eta_b \right) c_b^3 \right]. \end{aligned}$$

3. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ КОМПОЗИТА

В задаче об одноосном растяжении вдоль волокон (рис 3) предполагается, что ось волокон направлена вдоль оси z (оси 3) в цилиндрической системе координат.

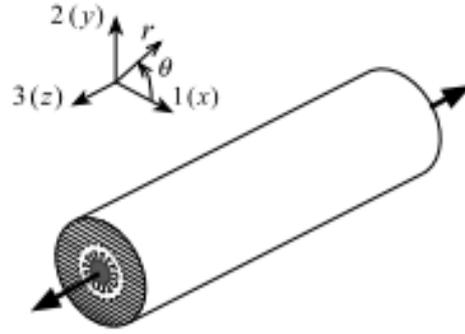


Рис.3. Задача одноосного растяжения (сжатия).

Полагаем, что вне ячейки задано однородное поле деформаций и перемещения имеют вид $u_z(z) = \varepsilon_0 z$. При этом возникают перемещения вдоль волокон и радиальные перемещения, а окружные перемещения равны нулю:

$$u_r^{(i)}(r) \neq 0, \quad u_z^{(i)}(z) = \varepsilon_0 z, \quad u_\theta^{(i)} = 0. \quad (6)$$

Закон Гука в матричном виде для ортотропного материала в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{r\theta} & C_{rz} & 0 & 0 & 0 \\ C_{r\theta} & C_{\theta\theta} & C_{\theta z} & 0 & 0 & 0 \\ C_{rz} & C_{\theta z} & C_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{\theta z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{rz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{r\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{\theta z} \\ 2\varepsilon_{rz} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{pmatrix} \quad (7)$$

По соотношениям деформации Коши находим

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_0, \quad (8)$$

и с помощью закона Гука (7) вместе с соотношениями (8) получаем определение не равных нулю компонент напряжений через перемещения

$$\sigma_{rr} = C_{rr} \varepsilon_{rr} + C_{r\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + C_{rz} \varepsilon_{zz} = C_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta} \frac{u_r}{r} + C_{rz} \varepsilon_0, \quad (9)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_{r\theta} \varepsilon_{rr} + C_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + C_{\theta z} \varepsilon_{zz} = C_{r\theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta\theta} \frac{u_r}{r} + C_{\theta z} \varepsilon_0, \quad (10)$$

$$\sigma_{zz} = C_{rz} \varepsilon_{rr} + C_{\theta z} \varepsilon_{\theta\theta} + C_{zz} \varepsilon_{zz} = C_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta z} \frac{u_r}{r} + C_{zz} \varepsilon_0. \quad (11)$$

Напряжения σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} должны удовлетворять уравнению равновесия, которое записывается в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(i)}}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

Остальные два уравнения равновесия выполняются тождественно.

Запишем уравнения равновесие (12) в перемещениях, учитывая соотношения (9)-(11)

$$r^2 u_r''(r) + r u_r'(r) - \lambda^2 u_r = -\beta \varepsilon_0 r. \quad (13)$$

где $\lambda = \sqrt{C_{\theta\theta}/C_{rr}}$ и $\beta = \frac{C_{rz} - C_{\theta z}}{C_{rr}}$.

Решение дифференциального уравнения (13) имеет вид

$$u_r(r) = u_r^{(h)}(r) + u_r^{(p)}(r), \quad (14)$$

где $u_r^{(h)}(r)$ – общее решение однородного уравнения (14), $u_r^{(p)}(r)$ – частное решение неоднородного уравнения (14).

Окончательно решение $u_r(r)$ представим в виде

$$u_r(r) = D_1 r^\lambda + D_2 r^{-\lambda} + \nu \varepsilon_0 r^3, \quad (15)$$

где $\nu = \frac{C_{rz} - C_{\theta z}}{C_{\theta\theta} - 9C_{rr}}$.

Таким образом с учетом (15) поля перемещений ортотропных фаз в этой задаче принимают вид

$$u_r^{(i)}(r) = D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} + \nu^{(i)} \varepsilon_0 r^3, \quad (16)$$

$$u_z^{(i)}(z) = \varepsilon_0 z. \quad (17)$$

где $D_1^{(i)}$, $D_2^{(i)}$ – неизвестные константы, которые определяются из граничных

условий; $\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{\theta\theta}^{(i)}/C_{rr}^{(i)}}$ и $\nu^{(i)} = \left(\frac{C_{rz}^{(i)} - C_{\theta z}^{(i)}}{C_{\theta\theta}^{(i)} - 9C_{rr}^{(i)}} \right)$ – константы. Следовательно,

используя соотношения малых деформаций, можно записать поля деформаций ортотропных фаз в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(i)}(r) &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} + \nu^{(i)} \varepsilon_0 r^3 \right] = \\ &= \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + (-\lambda_{(i)}) D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} + 3\nu^{(i)} \varepsilon_0 r^2, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= \frac{u_r}{r} = \frac{1}{r} \left[D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} + \nu^{(i)} \varepsilon_0 r^3 \right] = \\ &= D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} + 3\nu^{(i)} \varepsilon_0 r^2, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(i)}(r) = \varepsilon_0. \quad (20)$$

4. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ МНОГОФАЗНОГО КОМПОЗИТА

Найдем выражения для напряжений в каждой фазе композита. Учтем, что волокно (фаза 1) считается трансверсально изотропным с осью симметрии, направленной вдоль оси волокна, межфазный слой является трансверсально-изотропной средой с осью симметрии, направленной вдоль оси вискерса, а матрица является изотропной.

В результате получим, что напряжения в каждой фазе определяются формулами

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(1)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ \sigma_{\theta z}^{(1)} \\ \sigma_{rz}^{(1)} \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(1)} & C_{11}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & C_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(1)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \varepsilon_{zz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(2)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} \\ \sigma_{zz}^{(2)} \\ \sigma_{\theta z}^{(2)} \\ \sigma_{rz}^{(2)} \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & C_{23}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(2)} & C_{23}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}^{(2)} - C_{23}^{(2)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(2)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} \\ \varepsilon_{zz}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(3)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(3)} \\ \sigma_{zz}^{(3)} \\ \sigma_{\theta z}^{(3)} \\ \sigma_{rz}^{(3)} \\ \sigma_{r\theta}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(3)} & C_{11}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & C_{11}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(3)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(3)} \\ \varepsilon_{zz}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (23)$$

В случае изотропной или трансверсально-изотропных сред с осью симметрии, направленной вдоль волокон материальные константы равны

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{G_{\theta\theta}^{(i)} / G_{rr}^{(i)}} = \sqrt{C_{22}^{(i)} / C_{11}^{(i)}} = 1, \quad (24)$$

$$\nu^{(i)} = \left(\frac{C_{rz}^{(i)} - C_{\theta z}^{(i)}}{C_{\theta\theta}^{(i)} - C_{rr}^{(i)}} \right) = \left(\frac{C_{13}^{(i)} - C_{23}^{(i)}}{C_{22}^{(i)} - C_{11}^{(i)}} \right) = 0, \quad (25)$$

так как в этом случае, исходя из законов Гука имеются равенства

$$C_{rr}^{(i)} = C_{\theta\theta}^{(i)} \quad \text{или} \quad C_{11}^{(i)} = C_{22}^{(i)}, \quad (26)$$

$$C_{rz}^{(i)} = C_{\theta z}^{(i)} \quad \text{или} \quad C_{13}^{(i)} = C_{23}^{(i)}. \quad (27)$$

С учетом соотношений для деформаций (18-20) выражения для определения напряжений в каждой из фаз приобретают явную форму как функции от координаты r и зависят от констант $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$.

Формулы для определения независимых компонент $C_{ij}^{(i)}$ приведены в Приложениях А (А.2, А.3, А.5, А.6) и Б (Б.3, Б.5).

Неизвестные константы $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$ находятся из условий:

– условия несингулярности напряжений в центре волокна ($r = 0$) для фазы 1

$$D_2^{(1)} = 0; \quad (28)$$

– условия непрерывности перемещений и напряжений на границах идеального контакта фаз

$$u_r^{(i)}(r_i) = u_r^{(i+1)}(r_i), \quad \sigma_{rr}^{(i)}(r_i) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_i), \quad (i = 1, 2, 3, N); \quad (29)$$

– внешнего граничного условия на бесконечности ($r_{N+1} \rightarrow \infty$) для третьей фазы

$$\sigma_{rr}^{N+1}(r_{N+1}) = 0. \quad (30)$$

Эффективный продольный модуль Юнга всего композита находится также с использованием метода трех фаз Эшелби [27] с учетом соотношения $\varepsilon_{zz}^{eff} = \varepsilon_{zz}^{N+1} = \varepsilon_0$

$$E_{33}^{eff} = \frac{2}{\varepsilon_0 r_N^2} \sum_{i=1}^N \int_{r_{i-1}}^{r_i} \sigma_{zz}^{(i)} r dr. \quad (31)$$

Таким образом получены все необходимые соотношения для определения напряженного состояния в каждой из фаз многофазного композита.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ МНОГОФАЗНЫХ КОМПОЗИТОВ. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе оцениваются напряженные состояния, как это указывалось ранее, для двух типов композитов, каждый из которых состоит из трех слоев (волокно, межфазный слой и матрица). Первый композит представляет собой углеродное волокно марки Т-650 с выращенными на его поверхности углеродными нанотрубками, а второй представляет собой углеродное волокно марки IM7 с выращенными на его поверхности нанопроволками оксида цинка ZnO.

Для каждой из фаз композитов 1 и 2 приведем упругие константы $C_{ij,k}^{(l)}$, где индекс l соответствует номеру слоя композита, а индекс k – типу композита (композит 1 или композит 2).

Эффективные свойства фазы 1 и 3 считаются заданными, а второй фазы вычисляются по формулам (1-5). Дополнительно для второй фазы композита 1 определяется модуль Юнга в направлении действия нагрузки.

На основе материальных параметров углеродного волокна композита 1 (см. табл.1) и соотношений, данных в (А.3) упругие константы первой фазы (21) композита 1 имеют вид

$$C_{ij,1}^{(1)} = \begin{bmatrix} 19,8787 & 10,2787 & 8,1425 & 0 & 0 & 0 \\ 10,2787 & 19,8787 & 8,1425 & 0 & 0 & 0 \\ 8,1425 & 8,1425 & 245,397 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22,06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22,06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,8 \end{bmatrix},$$

аналогично, на основе материальных параметров углеродного волокна композита 2 (см. табл.2) и соотношений, данных в (А.3) упругие константы первой фазы (21) композита 2 имеют вид

$$C_{ij,2}^{(1)} = \begin{bmatrix} 19,8787 & 10,2787 & 8,1425 & 0 & 0 & 0 \\ 10,2787 & 19,8787 & 8,1425 & 0 & 0 & 0 \\ 8,1425 & 8,1425 & 245,397 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,8 \end{bmatrix}.$$

Эффективные свойства вискеризованного межфазного слоя композита 1 равны

$$E_{11,1}^{(2)} = 441,827 \text{ ГПа}, \quad \nu_{12,1}^{(2)} = 0,23, \quad \mu_{12,1}^{(2)} = 2,6801 \text{ ГПа},$$

$$\mu_{23,1}^{(2)} = 2,4953 \text{ ГПа}, \quad K_{23,1}^{(2)} = 13,8567 \text{ ГПа}, \quad E_{33,1}^{(2)} = 8,449 \text{ ГПа}.$$

На основании (А.6) упругие константы второй фазы (22) композита 1 имеют вид

$$C_{ij,1}^{(2)} = \begin{bmatrix} 444,777 & 6,394 & 6,394 & 0 & 0 & 0 \\ 6,394 & 16,352 & 11,3614 & 0 & 0 & 0 \\ 6,394 & 11,3614 & 16,352 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,4953 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,6801 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,6801 \end{bmatrix}.$$

Эффективные свойства вискеризованного межфазного слоя композита 2 равны

$$E_{11,2}^{(2)} = 57,53 \text{ ГПа}, \quad \nu_{12,2}^{(2)} = 0,35, \quad \mu_{12,2}^{(2)} = 2,1258 \text{ ГПа},$$

$$\mu_{23,2}^{(2)} = 2,0464 \text{ ГПа}, \quad K_{23,2}^{(2)} = 15,3846 \text{ ГПа}, \quad E_{33,2}^{(2)} = 7,113 \text{ ГПа}.$$

На основании (А.6) упругие константы второй фазы (22) композита 2 имеют вид

$$C_{ij,2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 65,1431 & 10,8224 & 10,8224 & 0 & 0 & 0 \\ 10,8224 & 17,431 & 13,3383 & 0 & 0 & 0 \\ 10,8224 & 13,3383 & 17,431 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,0464 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,1258 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,1258 \end{bmatrix}.$$

На основе материальных параметров эпоксидной матрицы композита 1 (см. табл.1) и соотношений, данных в (Б.5) упругие константы третьей фазы (23) композита 1 имеют вид

$$C_{ij,1}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4,0385 & 1,7308 & 1,7308 & 0 & 0 & 0 \\ 1,7308 & 4,0385 & 1,7308 & 0 & 0 & 0 \\ 1,7308 & 1,7308 & 4,0385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,1539 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,1539 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,1539 \end{bmatrix}.$$

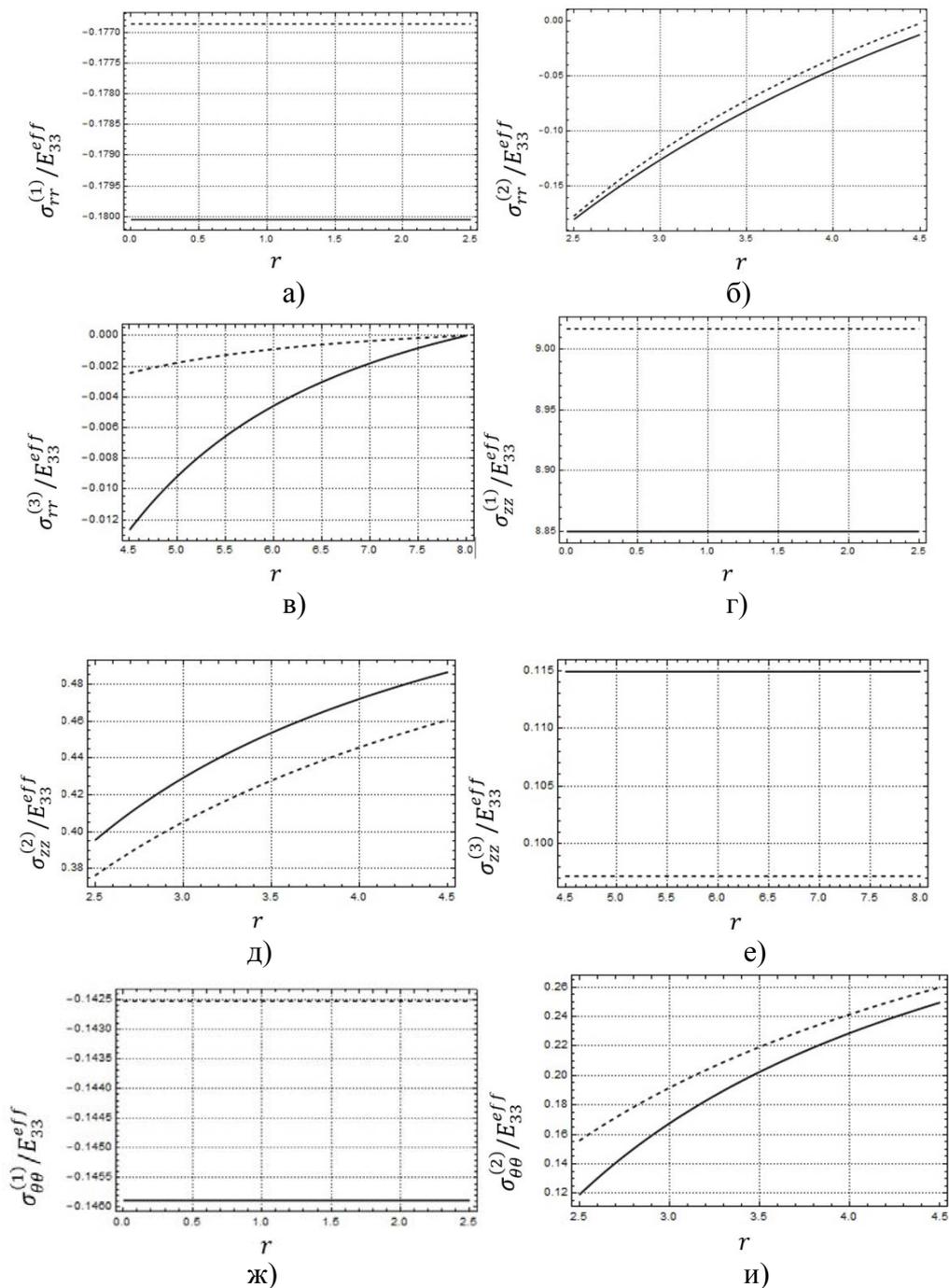
Аналогично, на основе материальных параметров эпоксидной матрицы композита 2 (см. табл. 2) и соотношений, данных в (Б.5) упругие константы третьей фазы (23) композита 2 имеют вид

$$C_{ij,2}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4,1476 & 2,2629 & 2,2629 & 0 & 0 & 0 \\ 2,2629 & 4,1476 & 2,2629 & 0 & 0 & 0 \\ 2,2629 & 2,2629 & 4,1476 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9424 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9424 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9424 \end{bmatrix}.$$

Эффективный продольный модуль Юнга определен по формуле (31) и равен $E_{33}^{eff} = 26,936 \text{ ГПа}$ для композита 1 и $E_{33}^{eff} = 26,447 \text{ ГПа}$ для композита 2.

Напряжения в каждой из фаз композитов 1 и 2 найдены по формулам (21-23), для которых константы $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$ определялись исходя их соотношений (28-30).

На рис.4 представлены графики напряженного состояния каждой из фаз 1 и 2 композитов в зависимости от радиуса, нормированные на эффективный продольный модуль Юнга. При построении графиков напряженного состояния каждой из фаз 1 и 2 композитов принималось, что заданное вне ячейки поле перемещения вдоль волокон соответствовало единичной деформации.



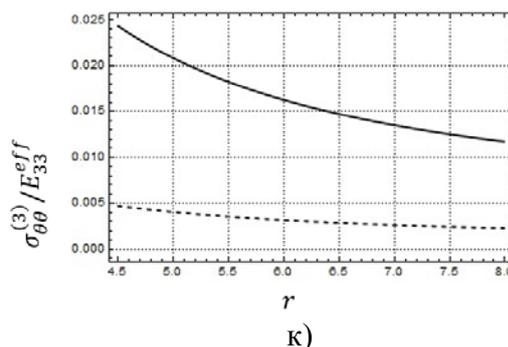


Рис.4. Зависимости напряжения в каждой из фаз 1 и 2 композитов, нормированных на эффективный продольный модуль Юнга, от радиуса вискеризованной ячейки: а) радиальное напряжение в первой фазе; б) радиальное напряжение во второй фазе; в) радиальное напряжение в третьей фазе; г) осевое напряжение в первой фазе; д) осевое напряжение во второй фазе; е) осевое напряжение в третьей фазе; ж) угловое напряжение в первой фазе; и) угловое напряжение во второй фазе; к) осевое напряжение в третьей фазе. Прямая линия – напряженное состояние композита 1, штриховая линия – напряженное состояние композита 2.

Исследуются осевые, радиальные и окружные напряжения. Графики, представленные на рис.4 позволяют судить об относительном уровне распределения напряжений в каждой из фаз композитов 1 и 2. Из графиков, представленных на рис.4, видно, что максимальные напряжения возникают в направлении осевой нагрузки, а именно в первой фазе – в волокне, как в самом жестком элементе (как у первого, так и у второго композитных материалов).

Определим предельные деформации при осевом нагружении композита, если прочность такого композита определяется прочностью волокон. Предельное напряжение для волокна Т-650 составляет 4,28 ГПа [28], предельное напряжение для волокна ИМ7 составляет 4-7 ГПа [29], следовательно, максимальные деформации для волокна Т-650 и волокна ИМ7 составляют соответственно 0,0178 и 0,0156-0,0273.

На рис.5 представлены графики зависимости осевых напряжений в каждой из фаз 1 и 2 композитов от радиуса вискеризованной ячейки для случая заданного вне ячейки поля перемещения вдоль волокон, соответствующего деформации 0,0178.

Для волокнистых композитов напряжения в волокнах и матрице связаны с деформациями законом Гука, т.е. $\sigma_B = E_B \varepsilon_B$, $\sigma_M = E_M \varepsilon_M$, причем при растяжении вдоль волокон $\varepsilon_B = \varepsilon_M = \varepsilon_{11}$.

Откуда получаем, что в случае волокнистых композитов с волокнами Т-650 и ИМ7, у которых отсутствует межфазный вискеризованный слой, в матрице возникают напряжения соответственно 53,2 МПа и 51,6 МПа.

Сравнивая напряжения в матрице полученные для волокнистых композитов и для волокнистых композиционных материалов с вискеризованными волокнами (55 МПа и 45,8 МПа) получаем, что для композитов с волокнами Т-650 введение дополнительного вискеризованного слоя нагружает матрицу на 3,4%, а для композитов с волокнами ИМ7 введение дополнительного вискеризованного слоя разгружает матрицу на 11,2%.

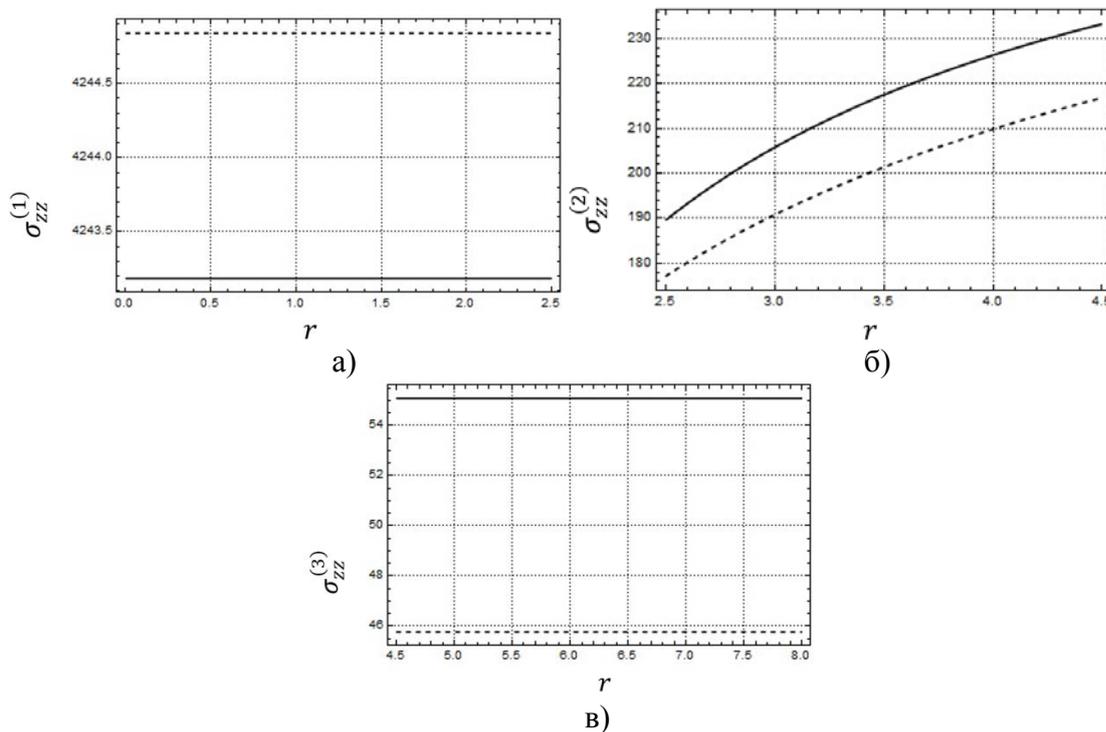


Рис.5. Зависимости осевых напряжений в каждой из фаз 1 и 2 композитов от радиуса вискеризованной ячейки, а) осевое напряжение в первой фазе; б) осевое напряжение во второй фазе; в) осевое напряжение в третьей фазе. Прямая линия – напряженное состояние композита 1, штриховая линия – напряженное состояние композита 2.

Согласно [31] прочность эпоксидной матрицы на растяжение находится в пределах 35-100 МПа. Максимальные напряжения, которые возникают в 3-ей фазе волокнистых композиционных материалов с вискеризованными волокнами равны 55 МПа в композите 1 и 45,8 МПа в композите 2 (рис.5). Т.е. напряжения, возникающие в 3-ей фазе находятся в допустимых пределах для эпоксидных матриц и для данной композитной структуры можно подобрать марку матрицы таким образом, чтобы без изменения внешней нагрузки сохранить прочностные характеристики композита.

Во второй фазе возникли напряжения, превышающие допустимые напряжения для эпоксидной матрицы. Для композита 1 в случае предельного напряжения 4,28 ГПа расчетные напряжения превышают допустимые на 90%, а для композита 2 расчетные напряжения превышают допустимые на 75% (рис.5).

ВЫВОДЫ

Показано, что во второй фазе – межфазном слое, для модифицированных волокнистых композиционных материалов возможно появление микрорастрескивания, т.к. напряжения в матрице превышают допустимые. Т.е. если оценивать прочность межфазного слоя по прочности матрицы, то вторая фаза может являться источником дефектного поля в области волокна. Вероятно, этим можно объяснить известные факты потери прочности волокна при вискеризации [4,9]. С другой стороны, в недавней работе [10] показано, что использование углеродных нанотрубок не ведет к потере прочности базового волокна. Этот результат может найти объяснение, если учесть, что моделирование бездефектного

нанокompозита позволяет установить факт догрузки жесткой фазы с одновременной разгрузкой мягкой фазы – матрицы в окрестности включения [30]. Такая особенность поведения нанокompозитов приводит не к уменьшению прочности, а к эффекту усиления, т.е. к возможности дополнительного деформирования композита без разрушения матрицы (в данном случае межфазного слоя).

По-видимому, использование углеродного нановолокна для формирования межфазного слоя соответствует именно этому случаю.

ПРИЛОЖЕНИЕ А.

Трансверсально-изотропная среда.

А.1 Трансверсально-изотропная среда с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси z или $-z$

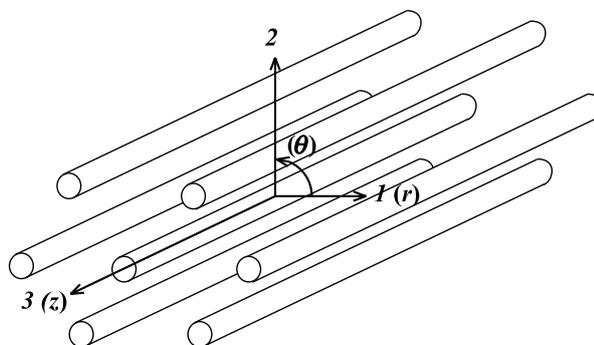


Рис.А.1. Система трансверсально-изотропной среды где ось 3 – ось симметрии.

Допустим, что ось 3 – ось плоскости изотропии (см. рисА.1). Тогда соотношение напряжения-деформации можно записать в следующем виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

Пять упругих констант $C_{11} = C_{22}, C_{12}, C_{13} = C_{23}, C_{33}$ и C_{44} определяют пять независимых эффективных свойств трансверсальной изотропной среды с осью плоскости симметрии, направленной вдоль оси 3 (z). Эти постоянные определяются через соответствующие модуль Юнга E_{33} , модули сдвига μ_{12} , $\mu_{23} = \mu_{32} = \mu_{13} = \mu_{31}$ объемный модуль плоской деформации K_{12} и коэффициент Пуассона $\nu_{31} = \nu_{32}$ с помощью следующих равенств

$$\begin{aligned} C_{33} &= E_{33} + 4\nu_{31}^2 K_{12}, & C_{13} &= 2K_{12}\nu_{31}, & C_{11} &= \mu_{12} + K_{12}, \\ C_{12} &= -\mu_{12} + K_{12}, & C_{44} &= \mu_{13} = \mu_{23}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Для определения упругих констант (А.7) можно использовать и другие эквивалентные соотношения

$$\begin{aligned}
E_{33} &= E_L, & E_{11} &= E_{22} = E_T, & \mu_{13} &= \mu_{31} = \mu_{23} = \mu_{32} = \mu_L, \\
\mu_{12} &= \mu_{21} = \mu_T, & \nu_{12} &= \nu_{21} = \nu_T, & \nu_{31} &= \nu_{32} = \nu_{LT}, \\
\nu_{13} &= \nu_{23} = \nu_{TL}.
\end{aligned}$$

при этом, тензор податливости S_{ij} имеет форму

$$\begin{bmatrix}
1/E_T & -\nu_T/E_T & -\nu_{LT}/E_L & 0 & 0 & 0 \\
-\nu_T/E_T & 1/E_T & -\nu_{LT}/E_L & 0 & 0 & 0 \\
-\nu_{TL}/E_T & -\nu_{TL}/E_T & 1/E_L & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/\mu_L & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_L & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_T
\end{bmatrix}$$

где $\mu_T = E_T/2(1+\nu_T)$. Таким образом, соотношения между упругими константами жесткости и инженерными константами можно записать следующим образом

$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_{22} = E_T(1-\nu_{TL}\nu_{LT})\Upsilon, & C_{33} &= E_L(1-\nu_T^2)\Upsilon, \\
C_{12} &= E_T(\nu_T + \nu_{TL}\nu_{LT})\Upsilon, \\
C_{13} &= C_{23} = E_T(\nu_{LT} + \nu_T\nu_{LT})\Upsilon = E_L(\nu_{TL} + \nu_T\nu_{TL})\Upsilon, \\
C_{44} &= \mu_L, & C_{66} &= \mu_T,
\end{aligned} \tag{A.3}$$

где $\Upsilon = \frac{1}{1-\nu_T^2-2\nu_{TL}\nu_{LT}-2\nu_T\nu_{TL}\nu_{LT}}$.

A.2 Трансверсально-изотропная среда с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси 1

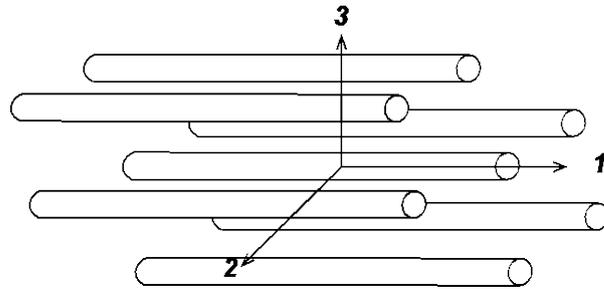


Рис.А.2. Система трансверсально-изотропной среды где ось 1 – ось симметрии.

Соотношение напряжения-деформации такой среды (см. рис.А.2) можно записать в следующем виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

В этом пять независимых постоянных, которые определяют свойства трансверсальной изотропной среды с осью симметрии, направленной вдоль оси 1 являются C_{11} , C_{22} , C_{12} , C_{23} и C_{66} , выражаются через модули упругости. Модули сдвига и коэффициенты с помощью формул

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_{11} + 4\nu_{12}^2 K_{23}, & C_{12} &= 2K_{23}\nu_{12}, & C_{22} &= \mu_{23} + K_{23}, \\ C_{23} &= -\mu_{23} + K_{23}, & C_{66} &= \mu_{12} = \mu_{13}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Имеет место и другая форма записи (A.5)

$$\begin{aligned} C_{22} &= C_{33} = E_T (1 - \nu_{TL}\nu_{LT}) Y, & C_{11} &= E_L (1 - \nu_T^2) Y, \\ C_{23} &= E_T (\nu_T + \nu_{TL}\nu_{LT}) Y, \\ C_{12} &= C_{13} = E_T (\nu_{LT} + \nu_T\nu_{LT}) Y = E_L (\nu_{TL} + \nu_T\nu_{TL}) Y, \\ C_{66} &= \mu_L, & C_{44} &= \mu_T. \end{aligned} \tag{A.6}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б.

Изотропная среда.

В случае полной изотропии остаются две независимые компоненты C_{ij} [22]

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

Учтем, что $\sigma_{ij} = \lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$, где $\delta_{kl}\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kk} = \Theta$ – объемная деформация; δ_{kl} – дельта Кронекера ($\delta_{kl} = 1$ если $k = l$ и $\delta_{kl} = 0$ если $k \neq l$); λ и μ – константы Ламе.

Тогда соотношение (B.1) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \tag{B.2}$$

Сравнивая (B.1) с (B.2), находим

$$C_{11} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = \lambda \tag{B.3}$$

Полезными могут также оказаться следующие отношения

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \tag{B.4}$$

Учитывая (B.4) выражения (B.3) принимают вид

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{B.5}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.В., Тарнопольский Ю.М.: *Композиционные материалы. Справочник.* – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
2. Лурье С.А., Дудченко А.А. *Введение в механику нанокompозитов.* – М.: МАИ-ПРИНТ, 2010. – 160 с.
3. Kim J.K., Mai Y.W. *Engineered interfaces in fiber reinforced composites.* – Elsevier Science Ltd., 1998. – Pp.18-33.
4. Sager R.J., Klein P.J., Lagoudas D.C., Zhang Q., Liu J., Dai L. *Effect of carbon nanotubes on the interfacial shear strength of T650 carbon fiber in an epoxy matrix // Compos. Sci. Technol.* – 2009. – Vol.69. – Pp.898-904.
5. Lin Y., Ehlert G.J., Sodano H.A. *Increase interface strength in carbon fiber composites through a ZnO nanowire interphase // Advan. Funct. Mater.* – 2009. – Vol.19. – No.16. – Pp.2654-2660.
6. Wang Y., Tang Z., Liang X., Liz-Marzan L.M., Kotov N.A. *SiO₂-coated CdTe nanowires: bristled nanocentipedes // Nano Letters.* – 2004. – Vol.4. – No.2. – Pp.225-231.
7. Galan U., Lin Y., Ehlert G.J., Sodano H.A. *Effect of ZnO nanowire morphology on the interfacial strength of nanowire coated fibers // Compos. Sci. Technol.* – 2011. – Vol.71. – Pp.946-954.
8. Narusberg V.L. & Riekstin'sh A.I. *Evaluating the effect of whiskerization of the fibers of composites on the fundamental frequency of a laminated cylindrical shell // Mechanics of Materials.* – 1988. – Vol.23. – No.6. – Pp.727-732.
9. Garcia E.J., Wardle B.L., Hart A.J., Yamamomj N. *Fabrication and multifunctional properties of a hybrid laminate with aligned carbon nanotubes grown in situ // Compos. Sci. Technol.* – 2008. – Vol.68. – No.9. – Pp.2034-2041.
10. Steiner S.A., Li R., Wardle B.L. *Circumventing the mechanochemical origins of strength loss in the synthesis of hierarchical carbon fibers // ACS Appl. Mater. Interf.* – 2013. – Vol.5. – No.11. – Pp.4892-4903.
11. Guz I.A., Rodger A.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J. *Predicting the properties of micro- and nanocomposites: from the microwhiskers to the bristled nanocentipedes // Philos. Trans. R. Soc. A.* – 2008. – Vol.366. – Pp.1827-1833.
12. Gibson R.F. *A review of recent research on mechanics of multifunctional composite materials and structures // Compos. Struct.* – 2010. – Vol.92. – Pp.2793-2810.
13. Eshelby J.D. *The continuum theory of lattice defects.* – Progress in Solid State Physics. – 1956. – Vol.3.
14. Eshelby J.D. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusions, and related problem // Proc. Royal of Society A.* – 1957. – Vol.241. – No.1226. – Pp.376-396.
15. Guz I.A., Rushchitsky J.J., Guz A.N. *Mechanical models for nanomaterials. Handbooks of nanophysics – principles and methods.* – CRC, 2011. – Vol.24. – Pp.1-12.
16. Мухелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* – М.: Наука, 1996. – 707 с.
17. Ванин Г.А. *Микромеханика композиционных материалов.* – Киев: Наукова думка, 1985. – 302 с.
18. Демидов С.П. *Теория упругости.* – М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.
19. Lurie S.A., Minhat M. *Application of generalized self-consistent method to predict effective elastic properties of bristled fiber composites // Composites B.* – 2014. – Vol.61. – Pp.26-40.

20. Лурье С.А., Минат М. *Влияние характеристик вискерсов на эффективный продольный модуль сдвига композиционных материалов, армированных вискеризованными волокнами* / 2-я Всеросс. научн. конф. «Механика наноструктурированных материалов и систем». Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2013. – Т.3. – С.82-88.
21. Chatzigeorgiou G., Siedel G.D., Lagoudas D. *Effective mechanical of «fuzzy fiber» composites* // Composites B. – 2012. – Vol.43. – Pp.2577-2593.
22. Кристенсен Р.М. *Введение в механику композитов*. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
23. Christensen R.M., Lo K.H. *Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models* // J. Mech. Phys. Solids. – 1979. – Vol.27. – Pp.315-330.
24. Hashin Z. *Thermoelastic properties and conductivity of carbon/carbon fiber composites* // Mech. Mater. – 1990. – Vol.8. – Pp.293-308.
25. Guz I.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J. *Modelling properties of micro- and nanocomposites with brush-like reinforcement* // Materialwissenschaft und Werkstofftechnik (Materials Science and Engineering Technology). – 2009. – Vol.40. – No.3. – Pp.154-160.
26. Chatzigeorgiou G., Siedel G.D., Lagoudas D. *Effective mechanical of «fuzzy fiber» composites* // Composites B. – 2012. – Vol.43. – Pp.2577-2593.
27. Lurie S.A., Minhat M., Tuchkova N. *Estimation of effective dynamic properties of bristled fiber composite materials based on self-consistent Eshelby method* // Journal of Engineering Mathematics. – 2015. – Vol.95. – Iss.1. – Pp.7-29.
28. THORNEL T-650/35 PAN-Based Fiber, Technical Data Sheet, 2012.
29. Кербер М.Л., Виноградов В.М., Головкин Г.С. *Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология: Уч. пос.* / Под ред. А.А. Берлина. – СПб.: Профессия, 2011. – 560 с.
30. Чекалкин А.А., Паньков А.А. *Лекции по механике конструкций из композиционных материалов*. – Пермь: Перм. гос. техн. ун-т., 1999. – 150 с.
31. Волков-Богородский Д.Б., Евтушенко Ю.Г., Зубов В.И., Лурье С.А. *Численно-аналитический учет масштабных эффектов при расчете деформаций нанокompозитов с использованием блочного метода мультиполей* // Вычислительная математика и математическая физика. – 2006. – Т.46. – №7. – С.1318-1337.

REFERENCES

1. Vasil'ev V.V., Tarnopol'skii Iu.M. *Kompozitsionnye materialy [Composite materials]*. Spravochnik, Moskva, Mashinostroenie, 1990, 512 p.
2. Lurie S.A., Dudchenko A.A. *Vvedenie v mekhaniku nanokompозитов [Introduction to Composite Mechanics]*. Moskva, MAI-PRINT, 2010, 160 p.
3. Kim J.K., Mai Y.W. *Engineered interfaces in fiber reinforced composites*. Elsevier Science Ltd., 1998, Pp.18-33.
4. Sager R.J., Klein P.J., Lagoudas D.C., Zhang Q., Liu J., Dai L. *Effect of carbon nanotubes on the interfacial shear strength of T650 carbon fiber in an epoxy matrix*. Compos. Sci. Technol., 2009, Vol.69, Pp.898-904.
5. Lin Y., Ehlert G.J., Sodano H.A. *Increase interface strength in carbon fiber composites through a ZnO nanowire interphase*. Advan. Funct. Mater., 2009, Vol.19, No.16, Pp.2654-2660.
6. Wang Y., Tang Z., Liang X., Liz-Marzan L.M., Kotov N.A. *SiO₂-coated CdTe nanowires: bristled nanocentipedes*. Nano Letters, 2004, Vol.4, No.2, Pp.225-231.

7. Galan U., Lin Y., Ehlert G.J., Sodano H.A. *Effect of ZnO nanowire morphology on the interfacial strength of nanowire coated fibers*. Compos. Sci. Technol., 2011, Vol.71, Pp.946-954.
8. Narusberg V.L., Riekstin'sh A.I. *Evaluating the effect of whiskerization of the fibers of composites on the fundamental frequency of a laminated cylindrical shell*. Mechanics of Materials, 1988, Vol.23, No.6, Pp.727-732.
9. Garcia E.J., Wardle B.L., Hart A.J., Yamamonj N. *Fabrication and multifunctional properties of a hybrid laminate with aligned carbon nanotubes grown in situ*. Compos. Sci. Technol., 2008, Vol.68, No.9, Pp.2034-2041.
10. Steiner S.A., Li R., Wardle B.L. *Circumventing the mechanochemical origins of strength loss in the synthesis of hierarchical carbon fibers*. ACS Appl. Mater. Interf., 2013, Vol.5, No.11, Pp.4892-4903.
11. Guz I.A., Rodger A.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J. *Predicting the properties of micro- and nanocomposites: from the microwhiskers to the bristled nanocentipedes*. Philos. Trans. R. Soc. A, 2008, Vol.366, Pp.1827-1833.
12. Gibson R.F. *A review of recent research on mechanics of multifunctional composite materials and structures*. Compos. Struct., 2010, Vol.92, Pp.2793-2810.
13. Eshelby J.D. *The continuum theory of lattice defects*. Progress in Solid State Physics, 1956, Vol.3.
14. Eshelby J.D. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusions, and related problem*. Proc. Royal of Society A., 1957, Vol.241, No.1226, Pp.376-396.
15. Guz I.A., Rushchitsky J.J., Guz A.N. *Mechanical models for nanomaterials*. Handbooks of nanophysics – principles and methods, CRC, 2011, Vol.24, Pp.1-12.
16. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]*. Moskva, Nauka, 1996, 707 p.
17. Vanin G.A. *Mikromekhanika kompozitsionnykh materialov [Micromechanics of composite materials]*. Kiev, Naukova Dumka, 1985, 302 p.
18. Demidov S.P. *Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]*. Moskva, Vyssh. Shkola, 1979, 432 p.
19. Lurie S.A., Minhat M. *Application of generalized self-consistent method to predict effective elastic properties of bristled fiber composites*. Composites B, 2014, Vol.61, Pp.26-40.
20. Lurie S.A., Minat M. *Vliianie kharakteristik viskersov na effektivnyi prodol'nyi modul' sdviga kompozitsionnykh materialov, armirovannykh viskerizovannyimi voloknami [Influence of the characteristics of whiskers on the effective longitudinal shear modulus of composite materials reinforced with viscurized fibers]*. 2-a Vseross. Nauchn. Konf. «Mekhanika nanostrukturirovannykh materialov i sistem», Sbornik trudov, Moskva, IPRIM RAN, 2013, Vol.3, Pp.82-88.
21. Chatzigeorgiou G., Siedel G.D., Lagoudas D. *Effective mechanical of «fuzzy fiber» composites*. Composites B, 2012, Vol.43, Pp.2577-2593.
22. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, Wiley-Interscience, 1979, 348 pp.
23. Christensen R.M., Lo K.H. *Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models*. J. Mech. Phys. Solids, 1979, Vol.27, Pp.315-330.
24. Hashin Z. *Thermoelastic properties and conductivity of carbon/carbon fiber composites*. Mech. Mater., 1990, Vol.8, Pp.293-308.
25. Guz I.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J. *Modelling properties of micro- and nanocomposites with brush-like reinforcement*. Materialwissenschaft und

- Werkstofftechnik (Materials Science and Engineering Technology), 2009, Vol.40, No.3, Pp.154-160.
26. Chatzigeorgiou G., Siedel G.D., Lagoudas D. *Effective mechanical of «fuzzy fiber» composites*. Composites B, 2012, Vol.43, Pp.2577-2593.
 27. Lurie S.A, Minhat M., Tuchkova N. *Estimation of effective dynamic properties of bristled fiber composite materials based on self-consistent Eshelby method*. Journal of Engineering Mathematics, December, 2015, Vol.95, Iss.1, Pp.7-29.
 28. THORNEL T-650/35 PAN-Based Fiber, Technical Data Sheet, 2012.
 29. Kerber M.L., Vinogradov V.M., Golovkin G.S. *Polimernye kompozitsionnye materialy: struktura, svoistva, tekhnologiya: Uch. pos. [Polymer composite materials: structure, properties, technology] / Pod red. A.A. Berlina. – SPb., Professia, 2011, 560 p.*
 30. Chekalkin A.A., Pan'kov A.A. *Leksii po mekhanike konstruksii iz kompozitsionnykh materialov [Lectures on the mechanics of structures from composite materials]*. Perm', Perm. gos. tekhn. univ., 1999, 150 p.
 31. Volkov-Bogorodsky D., Evtushenko Y., Zubov V., Lurie S. *Numerical-Analytical Modelling of Scale Effects for Disperse Reinforced Nanocomposites using Block Method*. Comput. Math. and Math. Phys., 2006, Vol.46, No.7, Pp.1318-1337.

Поступила в редакцию 28 декабря 2017 года.

Сведения об авторах:

Лурье Сергей Альбертович – д.т.н., проф., г.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: salurie@mail.ru

Рабинский Лев Наумович – д.ф.-м.н., проф., ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

Кривень Галина Ивановна – инж., ПАО Радиофизика, г. Москва, Россия

Лыкосова Елена Дмитриевна – м.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: elykosova@mail.ru