

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА,
АРМИРОВАННОГО ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ОРТОТРОПНЫМИ
ВОЛОКНАМИ, ОСЛАБЛЕННОГО ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ
ТРЕЩИНАМИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СДВИГЕ**

Мамедов Ариф Тапдыг, Мехтиев Рафаиль Керим

Азербайджанский Технический Университет, г. Баку, Азербайджан

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача антиплоского сдвига для упругой плоскости, с двояко-периодической системой круговых отверстий, заполненных шайбами без натяга из ортотропного упругого материала. Поверхность шайб, моделирующих волокна композита, равномерно покрыта однородной пленкой. В каждой шайбе имеется центрально расположенная трещина, длина которой меньше диаметра шайбы. Внешняя нагрузка τ_y^∞ в такой среде вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых имеет периодический характер.

Для решения используется известное положение о том, что смещение в случае антиплоского сдвига является гармонической функцией. Применяется известное представление решения в каждой области через соответствующую комплексную аналитическую функцию. Три аналитические функции представляются рядами Лорана. Путем удовлетворения краевых условий на контурах отверстий и берегах трещин, задача сводится к двум бесконечным алгебраическим системам относительно искомым коэффициентов и к одному сингулярному интегральному уравнению. Затем сингулярное интегральное уравнение методом Мультиппа–Каландия сведено к конечной алгебраической системе уравнений. Приводится процедура вычисления коэффициентов интенсивности напряжений. Для численной реализации изложенного способа были взяты случаи расположения отверстий в вершинах треугольной и квадратной сеток. Представлены результаты расчетов критической нагрузки в зависимости от длины трещины и упругих геометрических параметров перфорированной среды.

Актуальность таких исследований вызвана широким использованием в технике конструкций и изделий из композиционных материалов. Исследования по разработке математических моделей напряженно-деформируемого состояния армированного композита вблизи включения при сдвиге и наличие трещин практически отсутствуют.

Ключевые слова: ортотропное упругое включение; прямолинейная трещина; критическая нагрузка; круговое отверстие; продольный сдвиг; перфорированная плоскость

**ON A LONGITUDINAL SHIFT MODELLING OF FIBROUS
COMPOSITES, REINFORCE WITH ONE-DIRECTIONAL
ORTHOTROPIC FIBERS, WEAKENED BY RECTANGULAR CRACKS**

Mamedov Arif Tapdig, Mehtiev Rafail Kherim

Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

ABSTRACT

We consider a doubly periodic lattice with circular holes in a plane filled with washers without interference from an orthotropic elastic material whose surface is uniformly coated with a homogeneous film and each fiber is weakened by rectilinear crack. In each washer there is a centrally located crack, the length of which is smaller than the diameter of the washer. The external load τ_y^∞ in such an environment around the openings creates zones of increased stresses, the location of which has a periodic pattern. The stresses and their displacements are expressed through an analytic function.

For the solution, the well-known proposition is used that the displacement in the case of antiplane shift is a harmonic function. A well-known representation of the solution in each region is used through the corresponding complex analytic function. Three analytic functions are represented by Laurent series. Satisfying the boundary condition on the contours of the holes and the shores of the cracks, the problem reduces to two infinite algebraic systems with respect to the unknown coefficients and to one singular integral equation. Then the singular integral equation by the Mulpop-Kalandia method is reduced to a finite algebraic system of equations. The procedure for calculating the stress intensity factors is given. For the numerical realization of the above method, the cases of the arrangement of holes in the vertices of triangular and square grids were taken. The results of calculations of the critical load as a function of crack length and elastic geometric parameters of a perforated medium are presented.

The relevance of such studies is caused by the extensive use in the technology of structures and products made of composite materials. Studies on the development of mathematical models of the theoretically described stress-strain state of a reinforced composite near the inclusion under shear and crack are practically absent.

Keywords: ortotropic elastic comprehension; rectilinear crack; critical loading; circular orifice; lengthwise displacement; perforated sheet

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В наиболее общем случае регулярной структуры основная площадка S содержит n волокон различных диаметров при произвольном расположении их осей в пределах этой площадки, а микроструктура остальной части макро сечения армированного материала получается при двоякопериодическом продолжении основной площадки на все сечение (рис.1).

Ось Oz системы декартовых координат совмещена с осью произвольного волокна; ω_1 и ω_2 – базисные векторы, равные по модулю длинам соответствующих сторон основной ячейки, из которых составлена микроструктура материала; α – угол между векторами ω_1 и ω_2 . В дальнейшем следует воспользоваться представлением ω_2 через комплексные величины $\omega_2 = \omega_1 b e^{i\alpha}$, $\alpha \neq 0$ где $\omega_1 b$ – длина наклонной стороны ячейки, $0 < b < \infty$.

Круговые отверстия плоскости заполнены шайбами без натяга из ортотропного упругого материала, поверхность которых равномерно покрыта однородной пленкой. Рассматриваемая плоскость подвергнута сдвигу усилиями $\tau_y = \tau_y^\infty$, $\tau_x = 0$ (сдвиг на бесконечности). По мере возрастания внешней нагрузки τ_y^∞ в такой среде вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых имеет периодический характер. При деформации кусочно-однородного составного тела в случае идеального контакта смежные точки

контуров на границе «включение-покрытие», а также «покрытие-плоскость» будут иметь одинаковые перемещения и напряжения.

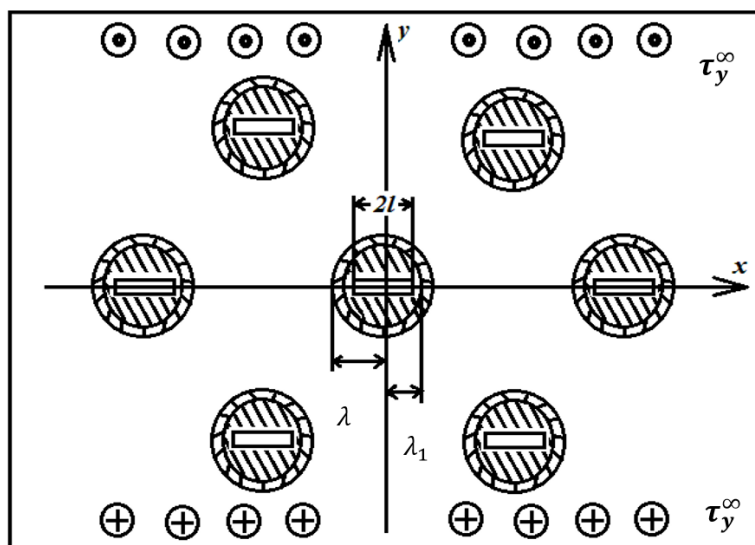


Рис.1. Расчетная схема задачи о трещине сдвига в волокнах композита.

Межфазное взаимодействие оказывает непосредственное влияние на формирование сильных или слабых связей между компонентами композита, что определяет его прочность, вязкость разрушения, термостойкость и другие свойства. Поэтому управление процессом межфазного взаимодействия является важным звеном в формировании свойств композита.

При чистом сдвиге в плоскостях, проходящих через оси волокон, деформации компонентов армированной среды во введенной системе координат определяются углами сдвига [1]

$$2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} \quad \text{и} \quad 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} \quad (1)$$

где W – составляющая вектора упругого смещения среды по оси Oz , из шести компонентов тензора напряжения отличными от нуля остаются только касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} .

Из приведенных уравнений следует, что τ_{xz} и τ_{yz} являются функциями x и y , а из соотношений закона Гука для однородного тела, уравнения равновесия и формул (1) вытекает

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

Здесь и далее рассматривается только составляющая вектора смещения по оси Oz , поэтому нижний индекс u функции W опускается. Решения уравнения (2) в дальнейшем строятся с помощью теории функций комплексных переменных $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, поэтому функция перемещений W отыскивается как аналитическая функция этих переменных

$$W = 2\text{Re}\varphi(z) = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)}, \quad (3)$$

где, чертой сверху отмечается функция, сопряженная $\varphi(z)$. Согласно соотношениям закона Гука и (1) при использовании известных представлений

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

а также непосредственно следующих из них операторов

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right),$$

получается формула

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial W}{\partial x} - i \frac{\partial W}{\partial y} \right) = 2\mu\varphi'(z), \quad (4)$$

по которой определяются касательные напряжения непосредственно через функцию $\varphi(z)$.

При разделении вещественных частей от мнимых и использовании соотношения (3), напряжения и смещения находятся по следующим формулам в связующей среде

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \mu_s \left[\varphi'_s(z) + \overline{\varphi'_s(z)} \right], & \tau_{yz} &= i\mu_s \left[\varphi'_s(z) - \overline{\varphi'_s(z)} \right], \\ W_s &= \varphi'_s(z) + \overline{\varphi'_s(z)} \end{aligned} \quad (5)$$

в волокнах

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \mu_a \left[\varphi'_a(z) + \overline{\varphi'_a(z)} \right], & \tau_{yz} &= i\mu_a \left[\varphi'_a(z) - \overline{\varphi'_a(z)} \right], \\ W_a &= \varphi'_a(z) + \overline{\varphi'_a(z)} \end{aligned} \quad (6)$$

в покрытии

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \mu_t \left[\varphi'_t(z) + \overline{\varphi'_t(z)} \right], & \tau_{yz} &= i\mu_t \left[\varphi'_t(z) - \overline{\varphi'_t(z)} \right], \\ W_t &= \varphi'_t(z) + \overline{\varphi'_t(z)} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\varphi'_a(t) - \overline{\varphi'_a(t)} = 0 \quad (8)$$

Введенные функции должны удовлетворять краевым условиям на границах волокна–покрытия ω_{mn} и покрытия–связующее Ω_{mn} , где индексы $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ определяют условия на контуре mn -го волокна, координаты центра которого равны $P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$. В случае идеального контакта перемещения и напряжения на сопрягаемых площадках равны между собой. Из рассмотрения равновесия элементарной призмы с учетом соотношений (2) легко получается, что

$$T = \tau_{xz} \cos \varphi + \tau_{yz} \sin \varphi = \mu \left[\varphi'(z) e^{i\theta} + \overline{\varphi'(z)} e^{-i\theta} \right]$$

Найденная формула, если принять во внимание следующие соотношения $e^{i\theta} = -i \frac{dz}{dS}$, $e^{-i\theta} = i \frac{dz}{dS}$, где S – дуга окружности контура волокна, непосредственно преобразуется к виду

$$T = -i\mu \frac{d}{dS} \left[\varphi(z) - \overline{\varphi(z)} \right] \quad (9)$$

С учетом полученных формул краевые условия выражаются через неизвестные функции $\varphi(z)$.

$$\begin{aligned}
\varphi_a(\tau_1) + \overline{\varphi_a(\tau_1)} \Big|_{\omega_{mn}} &= \varphi_t(\tau_1) + \overline{\varphi_t(\tau_1)} \Big|_{\omega_{mn}}, \\
\mu_a d \left[\varphi_a(\tau_1) - \overline{\varphi_a(\tau_1)} \right] \Big|_{\omega_{mn}} &= \mu_t d \left[\varphi_t(\tau_1) - \overline{\varphi_t(\tau_1)} \right] \Big|_{\omega_{mn}}, \\
\varphi_t(\tau) + \overline{\varphi_t(\tau)} \Big|_{\Omega_{mn}} &= \varphi_s(\tau) + \overline{\varphi_s(\tau)} \Big|_{\Omega_{mn}}, \\
\mu_t d \left[\varphi_t(\tau) - \overline{\varphi_t(\tau)} \right] \Big|_{\Omega_{mn}} &= \mu_s d \left[\varphi_s(\tau) - \overline{\varphi_s(\tau)} \right] \Big|_{\Omega_{mn}}, \\
(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty) & \\
\varphi'_a(t) - \overline{\varphi'_a(t)} &= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

Так как рассматриваемая задача механики разрушения о трещине в волокне сводится к решению однородного гармонического уравнения, то задача приводится к отысканию трех аналитических функций $\varphi_s(z)$, $\varphi_t(z)$, $\varphi_a(z)$ комплексного переменного в области, занятой сечением композита [1]

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{\mu_a}{\mu_t}\right) \varphi_a(\tau_1) + \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_t}\right) \overline{\varphi_a(\tau_1)} &= 2\varphi_t(\tau_1) \\
\left(1 + \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) \varphi_t(\tau) + \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) \overline{\varphi_t(\tau)} &= 2\varphi_s(\tau) \\
\varphi'_a(t) - \overline{\varphi'_a(t)} &= 0
\end{aligned} \tag{12}$$

Координаты точек на внешней поверхности покрытия в дальнейшем обозначаются $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; а на внутренней $\tau_1 = (\lambda - h) e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, t – аффикс точек берегов трещин, направленных по осям абсцисса, – толщина покрытия, величина, относящийся к покрытию, волокну и связующему, в дальнейшем отмечаются соответственно индексами t , a и s ; μ_t , μ_a и μ_s упругие постоянные материала покрытия, волокна и связующего соответственно.

Средние напряжения с учетом формул (5), (6) приводятся к виду

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = 2G_a \varphi'_a(z) + 2G_s \varphi'_s(z) + 2G_t \varphi'_t(z), \tag{14}$$

Состояние волокна в каждой ячейке рассматривается в локальной системе координат, поэтому требование (9) сводится к равенству функций $\varphi_a(z)$ для всех волокон. Для связующей среды эти ограничения с учетом формулы (4) имеют вид

$$\varphi'_s(z) = \varphi'_s(z + \omega_j) = \Phi_s(z), \tag{15}$$

т.е. $\Phi_s(z)$ должна быть двоякопериодической (эллиптической) функцией z . В этом случае условия (10) сводятся к одному функциональному соотношению на контуре произвольного волокна. Для всех остальных волокон они будут автоматически удовлетворяться в силу двоякой периодичности $\Phi_s(z)$. Далее, исходя из этих же условий, требования (14) достаточно выполнить только для одной произвольно выбранной ячейки.

Гармоническая функция перемещений W , регулярная в круге, ограниченном контуром ω_{mn} , отыскивается в виде ряда по нечетным степеням z

$$\varphi_{1a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}, \quad a_{2k} = a'_{2k} + ia''_{2k} \quad (16)$$

так как при сдвиге и повороте системы координат на угол π , она должна удовлетворять условиям антисимметрии

$$W_a(z) = -W_a(ze^{i\pi})$$

Двокопериодическую функцию $\Phi_s(z)$ проще всего построить, используя теорию эллиптических функций Вейерштрасса $\mathfrak{P}(z)$, где согласно определению

$$\mathfrak{P}(z) = z^{-2} + \sum_{m,n} \left[(z-p)^{-2} - p^{-2} \right] \quad (17)$$

Здесь и везде в дальнейшем вместо z используются безразмерные переменные $\frac{2z}{\omega_0}$, которые обозначаются z ; ω_0 – размерная длина построенной решетки, равной расстоянию между центрами соседних волокон; $P = m\omega_1 + n\omega_2$, где ω_1 и ω_2 – безразмерные периоды рассматриваемой решетки. Значения периодов принимаются равными

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 2e^{i\alpha} \quad (\alpha = \pi/3 \text{ или } \alpha = \pi/2).$$

Суммирование в формуле (17) производится по положительным и отрицательным целым m и n , за исключением $m = n = 0$.

Согласно теории эллиптических функций [3] двокопериодическая функция $\Phi_s(z)$ может быть выражена через функции Вейерштрасса $\mathfrak{P}(z)$ и $\zeta(z)$ их производные. Здесь $\zeta(z)$ – дзета-функция Вейерштрасса, равная по определению

$$\zeta(z) = -\int dz \mathfrak{P}(z) = z^{-1} + \sum_{m,n} \left[(z-P)^{-1} + P^{-1} + zP^{-2} \right] \quad (18)$$

Такую же главную часть имеет функция

$$\Phi_s(z) = \Phi_0(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{k+2}}{(k+1)!} \alpha_{2k} \mathfrak{P}^{(k)}(z) \quad (19)$$

где $P^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} \mathfrak{P}(z)$; $\Phi_0(z)$ не имеет особых точек, поэтому $\Phi_0(z) = C_0$, $\lambda = \frac{2z_0}{\omega_0}$ – безразмерный радиус волокна,

$$\Phi_s(z) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} \alpha_{2k} \mathfrak{P}^{(2k)}(z) \quad (20)$$

Непосредственным интегрированием определяется вид искомого представления функции $\varphi_s(z)$

$$\varphi_s(z) = \alpha_0 z - \alpha_2 \lambda^2 \zeta(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} \mathfrak{P}^{(2k+1)}(z) \quad (21)$$

Если разложения производных от эллиптических функций $\mathfrak{P}(z)$ и $\zeta(z)$ внести в формулу (21), то найдется искомое разложение функции $\varphi_s(z)$ в степенной ряд

$$\begin{aligned} \varphi_s(z) = & \alpha_0 z - \lambda^2 \alpha_2 \left(z^{-1} - \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{p,0} \frac{z^{2p+1}}{2p+1} \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \alpha_{p,k} \frac{z^{2p+1}}{2p+1} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1) z^{2k+1}} \end{aligned} \quad (22)$$

Функция смещений для покрытия, регулярная в кольце $\lambda_1 \leq |z| \leq \lambda$, строится в виде ряда Лорана

$$\varphi_t(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{2k} z^{2k+1}, \quad b_{2k} = b'_{2k} + i b''_{2k} \quad (23)$$

Решение краевой задачи пишем в виде

$$\varphi_a(z) = \varphi_{1a}(z) + \varphi_{2a}(z) \quad (24)$$

$$\varphi_{2a}(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{-l}^l \frac{g(t) dt}{t-z} \quad (25)$$

где $g(t)$ – искомая функция

$$g(x) = \frac{\mu_a}{2} \frac{d}{dx} [W^+(x, +0) - W^-(x, -0)].$$

К основным представлениям (16), (22), (23), (24), (25) добавляются дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи

$$\int_{-l}^l g(t) dt = 0.$$

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для определения произвольных постоянных рассматриваются граничные условия (12), где вместо функций $\varphi_s(z)$, $\varphi_t(z)$, $\varphi_{1a}(z)$ и соответствующих напряжений вносятся указанные выше разложения. В результате несложных преобразований получается следующая система алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} b_{2k} = & \left(1 + \frac{\mu_a}{\mu_t} \right) a_{2k}; \quad b_{-2k-2} = \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_t} \right) \overline{a_{2k}} \frac{\lambda_1^{4k+2}}{(2k+1)}; \\ \frac{a_0}{4} [g_1 + f^2 h_1] = & \tau_y^\infty + A + C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} A_{0,k}; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{a_0}{4} [h_2 f^2 + g_2] = -\alpha_2$$

$$\frac{a_{2k}}{4} [g_1 + f^{4k+2} h_1] = \lambda^2 \alpha_2 A_{k,0} + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{2p+1} \lambda^{2p+2} A_{p,k} \quad (27)$$

$$\frac{a_{2k}}{4} \lambda^{2k} [g_2 + f^{4k+2} h_2] = -\alpha_{2k+2}$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$g_1 = \left(1 + \frac{\mu_a}{\mu_t}\right) \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu_s}\right); \quad g_2 = \left(1 + \frac{\mu_a}{\mu_t}\right) \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_s}\right);$$

$$h_1 = \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_t}\right); \quad h_2 = \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_t}\right);$$

Система уравнений (26) вместе с равенством (27) замкнута. Последовательно исключая постоянные и отделяя вещественные части от мнимых, нетрудно получить две совершенно независимые системы уравнений

$$\alpha'_{2p+2} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{p,k} C'_{2k+2} + B_{2p}; \quad \alpha''_{2p+2} = \sum_{k=1}^{\infty} A'_{p,k} C''_{2k+2} + B_{2p};$$

$$G_{2p+2} = \frac{1}{2\mu_s} (\alpha'_{2p+2} + i\alpha''_{2p+2})$$

Здесь

$$B_{2p} = -\lambda^{2p+2} \alpha_{p,0} \beta \frac{g_2 + f^{4k+2} h_2}{g_1 + f^{4k+2} h_1},$$

$$A_{p,k} = -\lambda^{2p+2k+2} \alpha_{p,k} \beta \frac{g_2 + f^{4k+2} h_2}{g_1 + f^{4k+2} h_1} - \lambda^{2p+2k+4} \alpha_{p,0} \alpha_{k,0} \beta \frac{g_2 + f^{4k+2} h_2}{g_1 + f^{4k+2} h_1},$$

$$A'_{p,k} = \lambda^{2p+2k+2} \alpha_{p,k} \beta \frac{g_2 - f^{4k+2} h_2}{g_1 - f^{4k+2} h_1} - \lambda^{2p+2k+4} \alpha_{p,0} \alpha_{k,0} \beta \frac{g_2 + f^{4k+2} h_2}{g_1 + f^{4k+2} h_1},$$

$$\beta = \frac{(1+f^2) \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_a}\right) - (1-f^2) \left(\frac{\mu_s}{\mu_t} - \frac{\mu_t}{\mu_a}\right)}{(1+\xi) \left[f^2 + (1-f^2) \frac{\mu_t}{\mu_s} \right] + \eta \left[1 + (1+f^2) \frac{\mu_s}{\mu_a} + (1-f^2) \frac{\mu_s}{\mu_t} \right]},$$

$$A_{0,0} = 0, \quad f = \frac{\lambda - h}{\lambda}, \quad g_{p+k+1} = \sum_{mn} \frac{1}{T^{2p+2k+2}}, \quad T = \frac{1}{2} P_{mn},$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\left(\frac{2g}{1+g}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+g}\right)^2}; \quad g = \frac{a_{44}}{a_{55}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Требую теперь, чтобы функции (13) удовлетворяли граничному условию на берегах зон предразрушения, получим сингулярное интегральное уравнение относительно $g(x)$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{g(t) dt}{t-x} - Im[\varphi'_a(x)] = 0 \tag{28}$$

Для решения уравнения (28) сделаем замену переменных $\eta = x/l, \quad \tau = t/l$.

В зависимости от типа связи и прочности границы разрушение композита может происходить по-разному. Если распространяющаяся в композите трещина пересекает волокна, то вязкость разрушения увеличивается тем больше, чем больше волокна отслаиваются от матрицы. В этом случае для повышения вязкости разрушения предпочтительной является слабая связь на границе раздела волокно–матрица. При распространении трещины параллельно волокнам предпочтительнее прочная связь на границе волокно–матрица, что позволяет предотвратить разрушение по поверхности раздела.

Система (26) совместно с сингулярным уравнением (28) являются основными уравнениями задачи позволяющими определить $g(x)$ и коэффициенты $\alpha_{2k}, b_{2k}, a_{2k}$. Напомним, что система (26) содержит коэффициенты a_{2k} , зависящие от искомой функции $g(x)$. Система (26) и уравнение (28) оказались связанными и должны решаться совместно.

Зная функции $\varphi_s(z), \varphi_{1a}(z), \varphi_t(z)$ можно найти напряженно-деформированное состояние пластины. Меняя отношение жесткости волокна к жесткости связывающей среды можно получить все варианты, начиная со свободного от сил кругового отверстия и кончая абсолютно жестким волокном. Вязкость композита, армированного ориентированными в нескольких направлениях волокнами наполнителя, зависит главным образом от тех волокон, которые расположены поперек трещины и разрушение которых необходимо для дальнейшего распространения трещины.

Воспользовавшись разложением функции $\xi(z)$, учитывая соотношение $g(x) = -g(-x)$ и применяя замену переменных уравнение (28) можно привести к стандартной форме

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{P(\tau) d\tau}{\tau - \eta} - \text{Im} \varphi'_a(\eta) = 0 \quad (29)$$

Здесь

$$P(\tau) = g(t); \quad \lambda_1 = \frac{a}{l}$$

$$x = \eta_0 l; \quad t = \eta l; \quad \eta_0^2 = U; \quad \eta^2 = U; \quad (j = 1, 2, \dots)$$

Представим решение (29) в виде

$$P(\eta) = \frac{P_0(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}} \quad (30)$$

Функцию $P_0(\eta)$ заменяем интерполяционным полиномом Лагранжа, построенным по чебышевским узлам. Использование квадратурных формул дает

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{P(\tau) d\tau}{\tau - \eta} = \frac{1}{n \sin \theta} \sum_{v=1}^n P_v^0 \sum_{m=0}^{n-1} \cos m\theta_v \cdot \sin m\theta; \quad \tau_v = \eta_v \quad (31)$$

Формулы (31) позволяют заменить основные уравнения (29) бесконечной системой линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений $g(x)$ искомой функции в узловых точках, а также коэффициентов

$G_{2p+2} = \frac{1}{2\mu_s} (\alpha'_{2p+2} + i\alpha''_{2p+2})$. При этом последовательно исключая постоянные a_{2k} в соотношениях (26) и определяя вещественные части от мнимых, получаем две системы уравнений относительно C'_{2k} и C''_{2k}

$$\sum_{v=1}^n b_{mv} P_v^0 - \frac{1}{2} \text{Im} \varphi'_a(\zeta_m) = 0. \quad (m = 1, 2, \dots, M-1) \quad (32)$$

Здесь

$$b_{mv} = \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-v|} \theta_v}{2} \right], \quad P(\eta) = P_v^0$$

К системе (32) необходимо присоединить дополнительное условие, которое в дискретной форме имеет вид

$$\sum_{v=1}^n \frac{P_v^0}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\lambda_1^2)(\tau_v+1) + \lambda_1^2}} = 0 \quad (33)$$

После нахождения значений P_v^0 коэффициент интенсивности напряжений K_{III} определяется на основании соотношений (29), (33)

$$K_{III}^l = \sqrt{\pi l (1-\lambda_1^2)} \frac{1}{2n} \sum_{v=1}^n (-1)^v P_v^0 \frac{\theta_v}{2};$$

$$K_{III}^{-l} = \sqrt{\pi l} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k P_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2}.$$

Одной из наиболее важных характеристик конструкционного материала является его сопротивление распространению трещин или вязкость разрушения. В любом материале всегда есть внутренние дефекты (поры, трещины и т.п.), которые под действием сравнительно небольших напряжений могут увеличиться и привести к разрушению. От того, насколько хорошо материал сопротивляется распространению трещин, зависит надежность работы конструкций.

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Для численных расчетов был взят случай расположения отверстия в вершинах треугольной $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2e^{\frac{1}{3}i\pi}$ и квадратной $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2i$ решеток. Полагалось $n=10$ и $n=20$, что отвечает разбиению интервала на 10 и 20 чебышевских узлов соответственно. Полученные системы решались методом Гаусса с выбором главного элемента. Расчеты были выполнены на компьютере IBM по программе МАТЛАБ.

Так как размер зоны предразрушения l неизвестен, то разрешающая объединенная алгебраическая система уравнений задачи является нелинейной даже при линейном законе деформирования связей. Для ее решения при линейных связях использовали обратный метод. В случае нелинейного закона деформирования связей для определения касательных напряжений в зоне предразрушения использовался также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [13].

На рис.2 рассмотрен случай, когда трещины имеются только во включении, и отверстия расположены в вершинах квадратной решетки. Представлены результаты расчетов критической (предельной) нагрузки $\tau_* = \tau_y^\infty \sqrt{\omega_1} / K_{IIIc}$ в зависимости от длины трещины $l_* = l / \lambda$ для некоторых значений радиуса отверстия $\lambda = 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6$ (кривые 1-5).

На рис.3 аналогичная зависимость показана для треугольной решетки. Представлены результаты расчетов критической (предельной) нагрузки

$\tau_* = \tau_y^\infty \sqrt{\omega_1} / K_{IIIc}$ в зависимости от длины трещины $l_* = l / \lambda$ для некоторых значений радиуса отверстия $\lambda = 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6$ (кривые 1-5).

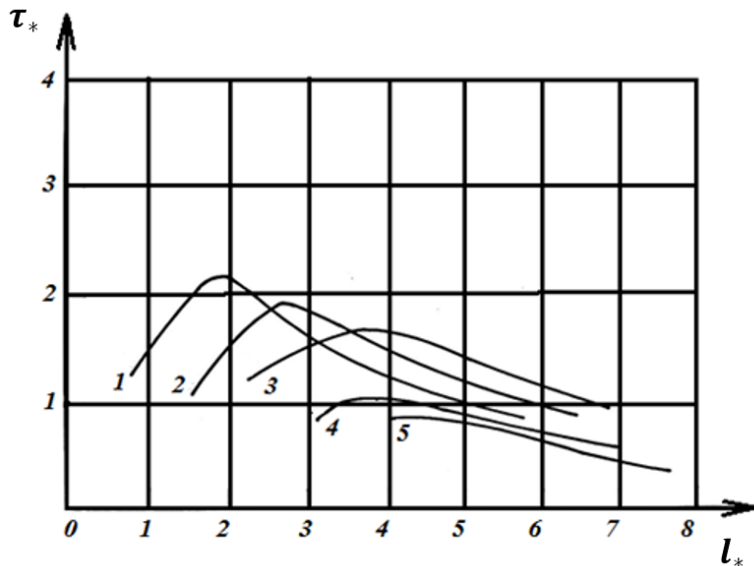


Рис.2. Зависимость критической нагрузки $\tau_* = \tau_y^\infty \sqrt{\omega_1} / K_{IIIc}$ от длины трещины $l_* = l / \lambda$ для некоторых значений радиуса отверстия $\lambda = 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6$ (кривые 1-5).

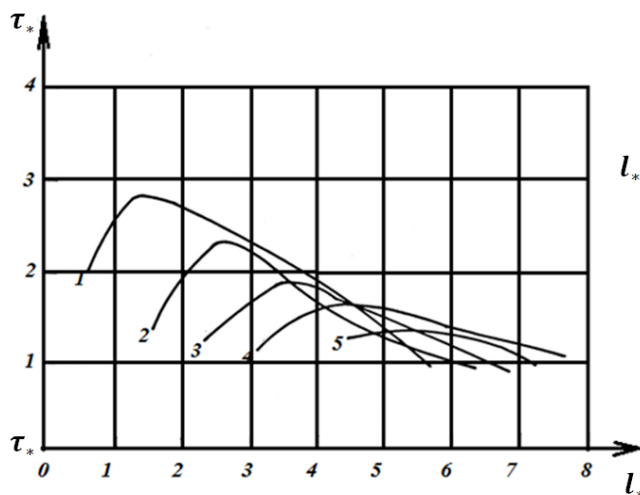


Рис.3. Зависимость критической нагрузки $\tau_* = \tau_y^\infty \sqrt{\omega_1} / K_{IIIc}$ от длины трещины $l_* = l / \lambda$ для некоторых значений радиуса отверстия $\lambda = 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6$ (кривые 1-5).

Расчеты проводились для следующих значений упругих параметров

$$\frac{\mu_b}{\mu_s} = 25, \quad \frac{\mu_b}{\mu_t} = 50.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдены решения сформулированных задач для случая расположения отверстий в вершинах треугольной и квадратной решеток. Полученные системы решались методом Гаусса с выбором главного элемента. Рассмотрен случай, когда трещины имеются только во включениях. Представлены результаты расчетов критической (предельной) нагрузки в зависимости от длины трещины для некоторых значений радиуса отверстия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван Фо Фы Г.А. *Теория армированных материалов с покрытиями*. – Киев: Наукова думка, 1971. – 230 с.
2. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
3. Lipperman F., Ryvkin M., Fuchs M.B. *Nucleation of cracks in two-dimensional periodic cellular materials // Computational Mechanics*. – 2007. – Vol.39. – Iss.2. – Pp.127-139.
4. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. *Перфорированные пластины и оболочки*. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
5. Гасанов Ф.Ф. *Трещинообразование в перфорированном теле при продольном сдвиге // Механика машин, механизмов и материалов*. – 2013. – №2. – С.46-51.
6. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. *Моделирование трещиностойкости композиционных материалов // Вычисл. мех. сплош. сред*. – 2009. – Т.2. – №2. – С.22-39.
7. Новиков Е.В. и др. *Кластеро и трещинообразование в композитах // Международный технико-экономический журнал*. – 2012. – №5. – С.96-99.
8. Мирсалимов В.М. *Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами*. – Баку: Элм, 1984. – 124 с.
9. Лехницкий С.Г. *Кручение анизотропных стержней*. – Москва: Наука, 1971. – 240 с.
10. Каландия А.И. *Математические методы двумерной упругости*. – Москва: Наука, 1973. – 304 с.
11. Мирсалимов В.М. *Неодномерные упругопластические задачи*. – Москва: Наука, 1987. – 256 с.
12. Мехтиев Р.К. *Сдвиг перфорированных тел с трещинами*. Автореф. дис. ... канд-та физ.-мат. наук. Баку, 1987. – 16 с.
13. Ильюшин А.А. *Пластичность*. – Москва: Лотос, 2004. – 376 с.
14. Панасюк В.В. *Механика квазихрупкого разрушения материалов*. – Киев: Наукова Думка, 1991. – 416 с.

REFERENCES

1. Van Fo G.A. *Teoriia armirovannykh materialov s pokrytiami [Theory of reinforced materials with coatings]*. Kiev: Naukova Dumka, 1971, 230 p.
2. Lehnitsky S.G. *Teoriia uprugosti anizotropnogo tela [Theory of elasticity of an anisotropic body]*. Moskva: Nauka, 1977, 416 p.
3. Lipperman F., Ryvkin M., Fuchs M.B. *Nucleation of cracks in two-dimensional periodic cellular materials*. Computational Mechanics, 2007, Vol.39, Iss.2, Pp.127-139.

4. Grigolyuk E.I., Filshinsky L.A. *Perforirovannye plastiny i obolochki [Perforated plates and shells]*. Moskva: Nauka, 1970, 556 p.
5. Gasanov F.F. *Treshinoobrazovanie v perforirovannom tele pri prodol'nom sdvige [Fissureformation in the perforated body with longitudinal shear]*. Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov, 2013, No.2, Pp.46-51.
6. Goldstein P.B., Perelmuter M.N. *Modelirovanie treshinostoikosti kompozitsionnykh materialov [Modeling of the ruggedness of composite materials]*. Vychisl. mekh. splosh. sred, 2009, Vol.2, No.2, Pp.22-39.
7. Novikov E.V. and etc. *Klastero i treshinoobrazovanie v kompozitakh [Cluster and fissure formation in composites]*. Mezhdunarodnyi tekhniko-ekonomicheskii zhurnal, 2012, No.5, Pp.96-99.
8. Mirsalimov V.M. *Razrushenie uprugikh i uprugoplasticheskikh tel s treshchinami [Destruction of elastic and elastoplastic bodies with cracks]*. Baku: Elm, 1984, 124 p.
9. Lechnitsky S.G. *Kruchenie anizotropnykh sterzhnei [Torsion of anisotropic rods]*. Moskva: Nauka, 1971, 240 p.
10. Kalandiya A.I. *Matematicheskie metody dvumernoi uprugosti [Mathematical methods of two-dimensional elastic-ghosts]*. Moskva: Nauka, 1973, 304 p.
11. Mirsalimov V.M. *Neodnomernye uprugoplasticheskie zadachi [Neodimensional elastoplastic problems]*. Moskva: Nauka, 1987, 256 p.
12. Mextiyev R.K. *Sdvig perforirovannykh tel s treshchinami [Shift of perforated bodies with cracks]*. Avtoref. dis. ... kand-ta fiz.-mat. nauk. Baku, 1987, 16 p.
13. Plyushin A.A. *Plastichnost' [Plasticity]*. Moskva: Lotos, 2004, 376 p.
14. Panasyuk V.V. *Mekhanika kvazikhрупкого razrusheniia materialov [The mechanics of equal-brittle fracture of materials]*. Kiev: Naukova Dumka, 1991, 416 p.

Поступила в редакцию 10 октября 2017 года.

Сведения об авторах:

Мамедов Ариф Тапдыг оглы – д.т.н., проф., зав. кафедрой «Технология материалов», Азербайджанский Технический Университет, г. Баку, Азербайджан; e-mail: ariff-1947@mail.ru
Мехтиев Рафаиль Керим оглы – к.ф.-м.н., доц., Азербайджанский Технический Университет, г. Баку, Азербайджан; e-mail: rafail60mehtiyev@mail.ru