

УДК 539.42

**ИНЖЕНЕРНАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ФРАГМЕНТОВ,
ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПРОНИКАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ
СИСТЕМЫ СТРУН В МАССИВНУЮ ПРЕГРАДУ***Беляев В.П.¹, Головешкин В.А.^{1,2}¹Московский технологический университет, г. Москва, Россия²ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия**АННОТАЦИЯ**

В работах [1,2] предложена модель для оценки параметров фрагментов, возникающих при высокоскоростном проникании периодической системы струн в массивную преграду. Поскольку сама модель и используемые математические соотношения, описывающие зависимость тензора напряжений от параметров среды, являются приближенными (как и критерий разрушения), то математическая точность является не всегда оправданной. Целью данной работы является разработка простой инженерной модели расчета процесса взаимодействия, которая позволила бы оценить размеры, скорость и энергию фрагментов, выбиваемых из преграды.

Для описания механических свойств материалов принимается гипотеза о несжимаемости и идеальной пластичности. Это означает, что для оценок требуется знание только плотности и предела текучести материала. Задача соударения рассматривается в двумерном приближении в предположении о плоском деформированном состоянии. Считается, что скорость ударника имеет порядок км/сек.

Результат решения, помимо механических свойств материалов, определяется следующими геометрическими характеристиками системы: диаметром струн; расстоянием между центрами струн.

Процесс взаимодействия распадается на два этапа. На первом этапе происходит растекание материала струны по преграде. Окончанию первого этапа соответствует наиболее крупный осколок. После этого в материале преграды остается движение по инерции. Результатом этого движения является серия мелких осколков. Их масса возрастает, а скорость и энергия убывают.

Проведено исследование решений, полученных в работах [1,2]. На основании выявленных асимптотик указанных решений, построены простые математические соотношения. Эти формулы позволяют производить оценки размеров и энергии возникающих осколков, а также глубины проникания (в том интервале значений исходных параметров, который представляет практический интерес), без существенной потери точности. Проведены сравнительные расчеты. Они показали приемлемую точность предложенной модели.

Ключевые слова: высокоскоростной удар; идеальная пластичность; струнная преграда; плоская деформация; проникание

**ENGINEERING MODEL FOR ESTIMATING PARAMETERS
OF FRAGMENTS FORMING AT PENETRATION OF PERIODIC
STRING SYSTEM INTO MASSIVE BARRIER**Belyaev V.P.¹, Goloveshkin V.A.^{1,2}

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 15-01-00565-а.

ABSTRACT

The model for estimating parameters of fragments forming at high-velocity penetration of periodic string system into a massive barrier is suggested in papers [1,2]. Since the model itself and used mathematical relations that describe correlation of stress tensor and environment settings are approximate (as a criterion of destruction), mathematical accuracy is not always justified. The goal of this paper is a development of a simple engineering model for calculating the process of interaction that allows estimating size, speed and energy of fragments knocked out of the barrier.

The hypothesis of incompressibility and ideal plasticity is accepted to describe mechanical properties of colliding object and barrier. It means that estimations require only knowledge of density and yield strength of material. The problem of collision is considered in 2-dimensional approximation assuming of flat deformed condition. It is assumed that the speed of the colliding object has the order of km/s. The result of solution, besides mechanical properties of materials, is determined by following geometrical attributes of system: string diameters, distance between centers of the strings.

The process of interaction is divided into two stages. At the first stage the material spreading on the string occurs. The biggest splinter corresponds to the end of the first stage. Then the inertial motion remains in the colliding objects' material. The result of this motion is a series of smaller splinters. Their mass increases, while speed and energy decrease.

The research of solutions in papers [1,2] has been undertaken. Simple mathematical equations are built based on identified asymptotics of indicated solutions. These formulas allow estimating size and energy of forming splinters as well as depth of penetration (in the value range of initial parameters that has practical interest) without considerable loss of accuracy. The comparative calculations are accomplished and they show adequate accuracy of suggested model.

Keywords: high-velocity impact; ideal plasticity; string barrier; flat deformation; penetration

Для описания деформации материала преграды и ударника в работах [1,2] принята следующая модель. Рассматривается периодическая систему струн, ударяющуюся о массивную преграду. $2L$ – расстояние между струнами, $2l$ – поперечный размер струны. Предполагается, что размер струны величина одного порядка с расстоянием между ними. Начальная скорость струн v_0 порядка км/сек. Относительно свойств материала преграды принимается гипотеза о несжимаемости и идеальной пластичности с пределом текучести Y_p . Задача рассматривается в двумерном приближении в предположении о плоском деформированном состоянии.

Чертеж к рассматриваемой задаче показан на рис.1. Поскольку рассматривается периодическая система струн, то можно рассматривать задачу о проникании отдельно взятой струны в участок преграды, ограниченной недеформируемыми гладкими стенками (они соответствуют на рис.1 вертикальным прямым, проходящим через точки A и D). На рисунке BC соответствует поперечному размеру струны, AD – расстоянию между струнами, текущая глубина погружения струны в преграду предполагается равной h . При проникании системы струн в преграду материал преграды выдавливается. Поэтому значение h отсчитывается от реального уровня поверхности. Условие

отрыва является предметом специального рассмотрения, и об этом будет сказано ниже. Считается, что прямая BC представляет передний край струны, а круговой сегмент BC – слой материала преграды «прилипший» к струне, движущийся как жесткое тело со скоростью u , той же, что и передний край струны.

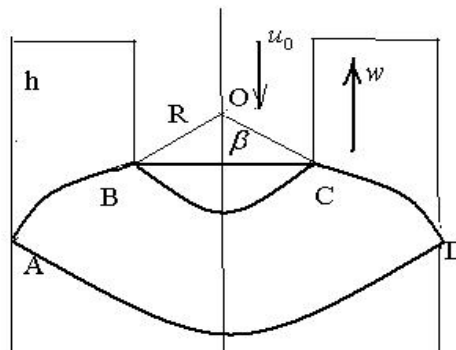


Рис.1. Чертеж к задаче о внедрении периодической системы струн в преграду.

Область $ABCD$ ограничена окружностями $r = R$ и $r = a$ с центром в точке O и линиями AB и CD . Уравнения этих линий и положение центра окружности будет определено позднее. В полярной системе координат с центром в точке O поле скоростей в области $ABCD$ имеет вид

$$u_r = u \frac{R^2}{a^2 - R^2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \cos \varphi; \quad u_\varphi = u \frac{R^2}{a^2 - R^2} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) \sin \varphi \quad (1)$$

Обозначим $L/l = \gamma$. Поскольку $R = l/\sin \beta$, $a = L/\sin \beta$, соотношения (1) можно переписать в виде

$$u_r = u \frac{1}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\gamma^2 R^2}{r^2} - 1 \right) \cos \varphi; \quad u_\varphi = u \frac{1}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\gamma^2 R^2}{r^2} + 1 \right) \sin \varphi \quad (2)$$

Скорости деформаций соответственно равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{-2u}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\gamma^2 R^2}{r^3} \right) \cos \varphi \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} = \frac{2u}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\gamma^2 R^2}{r^3} \right) \cos \varphi \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) = \frac{-2u}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\gamma^2 R^2}{r^3} \right) \sin \varphi \end{aligned}$$

Выше линий AB , CD предполагаем, что материал преграды движется как жесткое тело со скоростью w . Из закона сохранения массы определим w . Имеем

$$ul = w(L-l), \quad w = \frac{u}{\gamma - 1}. \quad (3)$$

Уравнение линии CD (линия AB ей симметрична) определяется из условия непрерывности нормальной составляющей вектора скорости. Предполагая, что уравнение $r = r(\varphi)$ является уравнением линии CD , дифференциальное уравнение для определения функции $r = r(\varphi)$, полученное из условия непрерывности нормальной составляющей поля скоростей и имеет следующий вид [1,2]

$$\sin \varphi \left(\frac{\gamma^2 R^2}{r^2} - \gamma \right) \cdot \frac{dr}{d\varphi} = r \cos \varphi \left(\frac{\gamma^2 R^2}{r^2} + \gamma \right) \quad (4)$$

Его решение с условием $\varphi = \beta$ при $r = R$, имеет вид

$$\sin \varphi = \sin \beta \frac{(\gamma+1)Rr}{\gamma R^2 + r^2} \quad (5)$$

Тогда уравнение линии CD представимо в виде $\varphi = g(r)$, где

$$g(r) = \arcsin \left[\sin \beta \frac{(\gamma+1)Rr}{\gamma R^2 + r^2} \right] \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что $\varphi = \beta$ при $r = R$ и $r = \gamma R$.

Материал преграды, находящийся ниже линии AD, покоится.

Центральное звено исследования модели – использование уравнение баланса энергии. Поэтому для дальнейшего анализа нам используются выражения для мощности внутренних сил и кинетической энергии принятого поля скоростей. При этом значение β и положение начала полярной системы координат определяется из условия минимума мощности внутренних сил.

Мощность внутренних сил W равна [1,2]

$$\begin{aligned} W = Y_p u \frac{2}{\sqrt{3}} l \left\{ \frac{4\gamma}{\gamma+1} \cdot \frac{\beta}{\sin \beta} + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[\ln \frac{(\gamma+1) \cos \beta + (\gamma-1)}{(\gamma+1) \cos \beta - (\gamma-1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\sqrt{\gamma}}{(\gamma+1) \sin \beta} \ln \frac{2\sqrt{\gamma} \cos \beta - (\gamma+1) \sin \beta}{2\sqrt{\gamma} \cos \beta + (\gamma-1) \sin \beta} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \cdot \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} + \frac{2\gamma}{\gamma+1} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

Значение β определяется из условия минимума мощности W . Полагая

$$\frac{dW}{d\beta} = 0 \quad (8)$$

Для определения β имеем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} (1 - \cos \beta) - 4 \frac{\gamma}{\gamma+1} \beta \cos \beta - 2 \frac{\gamma}{\gamma+1} + \\ + \frac{4\gamma\sqrt{\gamma}}{\gamma^2 - 1} \cos \beta \ln \frac{2\sqrt{\gamma} \cos \beta - (\gamma-1) \sin \beta}{2\sqrt{\gamma} \cos \beta + (\gamma-1) \sin \beta} + \\ + \frac{32\gamma^2}{\gamma+1} \sin \beta \frac{1}{\left[4\gamma - (\gamma+1)^2 \sin^2 \beta \right]} = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

Уравнение (9) определяет β как функцию параметра γ . Заметим также, что параметр $\beta(\gamma)$ является вспомогательным параметром для других вычислений.

При построении данной приближенной модели ограничимся следующим диапазоном параметра γ , будем считать, что $2 < \gamma < 5$.

Исследование соотношения (9), показывает, что поведение $\beta(\gamma)$ при $\gamma \rightarrow 1$ имеет характер $\cong \sqrt{\gamma-1}$, при $\gamma \rightarrow \infty$ характер $\cong \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$. Данную зависимость можно попытаться приблизить формулой $\beta = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma-1}$.

Сравним результаты расчета на основании численного решения уравнения (9) (его обозначим $\beta_c(\gamma)$), и вычисленного по формуле $\beta = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma-1}$ (его обозначим $\beta_m(\gamma)$). Результаты сравнения приведены в таблице 1.

Таблица 1.

γ	$\beta_c(\gamma)$	$\beta_m(\gamma)$	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность %
2.0	0.497728	0.500000	0.0022724	0.456554
3.0	0.491367	0.471405	0.0199627	4.06268
4.0	0.471766	0.433013	0.0387530	8.21446
5.0	0.451672	0.400000	0.0516721	11.4402

Отметим, что приближенная формула $\beta = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma-1}$ дает приемлемую точность вычислений в рассматриваемом диапазоне значений γ .

Кинетическая энергия E равна

$$\begin{aligned}
 E = \rho_p \frac{u^2 l^2}{(\gamma^2 - 1)^2} & \left[(\gamma + 1)^2 (\gamma - 1) \frac{h}{l} + \gamma^2 (\gamma^2 - 1) \frac{\beta}{\sin^2 \beta} - \right. \\
 & - \frac{\gamma(\gamma + 1)\sqrt{\gamma}}{2 \sin \beta} \int_{1/\gamma}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z}{(1+z)^2} \cdot \frac{(\gamma + 1)^2}{\gamma} \sin^2 \beta}} \cdot \frac{(1-z)^2}{z\sqrt{z(1+z)}} dz - \\
 & \left. - \frac{2\gamma\sqrt{\gamma}(\gamma + 1)}{\sin \beta} \int_{1/\gamma}^1 \frac{1}{\sqrt{z(1+z)} \sqrt{1 - \frac{z}{(1+z)^2} \cdot \frac{(\gamma + 1)^2}{\gamma} \sin^2 \beta}} dz \right] \quad (10)
 \end{aligned}$$

где ρ_p – плотность материала преграды.

Поскольку β определяется соотношением (9) как функция параметра γ , то мощность работы внутренних сил, согласно (7), может быть представлена в виде

$$W = Y_p u l f_1(\gamma) \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}
 f_1(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{3}} & \left\{ \frac{4\gamma}{\gamma + 1} \cdot \frac{\beta}{\sin \beta} + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left[\ln \frac{(\gamma + 1) \cos \beta + (\gamma - 1)}{(\gamma + 1) \cos \beta - (\gamma - 1)} - \right. \right. \\
 & - \frac{2\sqrt{\gamma}}{(\gamma + 1) \sin \beta} \ln \frac{2\sqrt{\gamma} \cos \beta - (\gamma - 1) \sin \beta}{2\sqrt{\gamma} \cos \beta + (\gamma - 1) \sin \beta} \left. \right] + \\
 & \left. + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \cdot \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right\} \quad (12)
 \end{aligned}$$

С учетом принятой формулы для β и асимптотики при $\gamma \rightarrow 1$ и $\gamma \rightarrow \infty$, приближенная формула для ее представления имеет вид

$$f_1(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\gamma-1}} + 2 \frac{\ln \gamma}{\gamma-1} + 2 \cdot \sqrt{\gamma-1} + 4 + 2 \ln \gamma + 4 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right\} \quad (13)$$

Сравним результаты расчета на основании вычисления по формуле (11.1) (его обозначим $f_{1c}(\gamma)$), и вычисленного по формуле (11.2) (его обозначим $f_{1m}(\gamma)$). Результаты сравнения приведены в таблице 2.

Таблица 2.

γ	$f_{1c}(\gamma)$	$f_{1m}(\gamma)$	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность %
2.0	14.1611	13.9787	0.182421	1.28818
3.0	15.9413	15.6329	0.308381	1.93448
4.0	17.3231	16.9921	0.330987	1.91067
5.0	18.4297	18.1176	0.312143	1.69370

Результаты, приведенные в таблице 2, показывают, что приближенная формула (13) дает вполне приемлемую точность для приближенных оценок.

Аналогично, для кинетической энергии имеем

$$E = \rho_p u^2 l^2 \left[f_2(\gamma) + f_3(\gamma) \frac{h}{l} \right], \quad (14)$$

где

$$f_2(\gamma) = \frac{1}{(\gamma^2 - 1)^2} \left[\gamma^2 (\gamma^2 - 1) \frac{\beta}{\sin^2 \beta} - \frac{\gamma(\gamma+1)\sqrt{\gamma}}{2 \sin \beta} \int_{1/\gamma}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z}{(1+z)^2} \cdot \frac{(\gamma+1)^2}{\gamma} \sin^2 \beta}} \cdot \frac{(1-z)^2}{z\sqrt{z}(1+z)} dz - \frac{2\gamma\sqrt{\gamma}(\gamma+1)}{\sin \beta} \int_{1/\gamma}^1 \frac{1}{\sqrt{z}(1+z)} \sqrt{1 - \frac{z}{(1+z)^2} \cdot \frac{(\gamma+1)^2}{\gamma} \sin^2 \beta} dz \right] \quad (15)$$

$$f_3(\gamma) = \frac{1}{\gamma-1}.$$

С учетом принятой формулы для β и асимптотики при $\gamma \rightarrow 1$ и $\gamma \rightarrow \infty$, приближенная формула для ее представления имеет вид

$$f_2(\gamma) = \frac{5}{6} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}}. \quad (16)$$

Сравним результаты расчета на основании вычисления по формуле (15) – его обозначим $f_{2c}(\gamma)$, и вычисленного по формуле (16), его обозначим $f_{2m}(\gamma)$. Результаты сравнения приведены в таблице 3.

Уравнения движения струны с учетом растекания получены в [1,2]. Пусть v – скорость задней стенки струны, u – скорость лицевой стороны струны (т.е. поверхности контакта струны с преградой), δ – продольный размер, σ_s , ρ_s – предел текучести и плотность материала струны. Напряжение σ – возникающее на поверхности контакта струны с преградой может быть оценено выражением

$$\sigma \approx \sigma_s + \rho_s \frac{v^2 - u^2}{2} \quad (17)$$

Таблица 3.

γ	$f_{2c}(\gamma)$	$f_{2m}(\gamma)$	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность %
2.0	1.68450	1.66667	0.0178336	1.05868
3.0	1.78227	1.76777	0.0145001	0.813579
4.0	1.91376	1.92450	0.0107447	0.561445
5.0	2.04017	2.08333	0.0431588	2.11545

Напряжение (17) можно рассматривать как внешнюю силу, действующую на преграду. Обозначим N – мощность этих сил, действующих на преграду. С учетом (17), принимая во внимание, что тыльная сторона струны ненагружена, приближенно можно положить

$$N = u \left(\sigma_s + \rho_s \frac{v^2 - u^2}{2} \right) 2l \quad (18)$$

Уравнение баланса энергии имеет вид

$$\frac{dE}{dt} + W = N, \quad (19)$$

где E – кинетическая энергия системы (14); W – мощность внутренних сил (11); N – мощность внешних сил (18).

Отметим, что глубина проникания меняется не только за счет движения переднего края струны со скоростью u , но и за счет подъема уровня из выдавливания материала преграды со скоростью w .

Поэтому

$$\frac{dh}{dt} = u + w \quad (20)$$

Используя (3), получаем

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\gamma u}{\gamma - 1}$$

Из баланса энергии (19) после преобразований получается следующее уравнение движения

$$M_p \frac{du}{dt} = \left(\sigma_s + \rho_s \frac{v^2 - u^2}{2} \right) 2l - D_c u^2 - R_c. \quad (21)$$

соответствующие коэффициенты равны и могут быть интерпретированы:

$M_p = 2\rho_p l^2 \left[f_2(\gamma) + f_3(\gamma) \frac{h}{l} \right]$ – присоединенная масса; $D_c = \rho_p l f_3(\gamma) \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ –

коэффициент динамического сопротивления; $R_c = Y_p l f_1(\gamma)$ – статическое

сопротивление; $\left(\sigma_s + \rho_s \frac{v^2 - u^2}{2} \right) 2l$ – внешние усилия, действующие на преграду

(на единицу длины струны).

Для построения полной математической модели необходимы некоторые предположения относительно профиля поля скоростей в струне. Принята следующая модель. Полагаем, что массовая скорость в направлении удара

в струне постоянна и равна v за исключением малой области шириной s около контактной поверхности струна-ударник. В этой области происходит пластическое течение материала струны, а скорость изменяется от величины u на поверхности контакта до значения v . Тогда торможение задней стенки определяется по аналогии с известными моделями внедрения стержней в преграду. Уравнение торможения имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\sigma_s}{\delta\rho_s} \quad (22)$$

Кинематическое соотношение для изменения толщины струны в направлении движения представляется уравнением

$$\frac{d\delta}{dt} = -(v-u) \quad (23)$$

Для изменения глубины проникания имеется следующее уравнение

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\gamma u}{\gamma-1} \quad (24)$$

Уравнение движения (21) представимо в виде

$$\left(M_{p1} + M_{p2} \frac{h}{l} \right) \frac{du}{dt} = \left(\sigma_s + \rho_s \frac{v^2 - u^2}{2} \right) 2l - D_c u^2 - R_c, \quad (25)$$

где $M_{p1} = 2\rho_p l^2 f_2(\gamma)$ и $M_{p2} = 2\rho_p l^2 f_3(\gamma)$. Уравнения (22-25) с начальными условиями $\delta = \delta_0$; $u = u_0$; $v = v_0$; $h = 0$ при $t = 0$ представляют полную математическую постановку задачи в рамках принятой модели до начала процесса отрыва фрагментов преграды.

Относительно отрыва принимается следующая модель. Ясно, что до определенного момента скорость выдавливаемого материала преграды w будет возрастать. В определенный момент начнется ее уменьшение. В рамках принятой жестко-пластической модели (модуль Юнга равен бесконечности) напряжения в стержне с величиной меньше Y_p распространяются с бесконечной скоростью. Участок выдавливаемого материала, находящийся между вертикальными прямыми исходящими из точек C и D (рис.1) можно рассматривать как стержень. Тогда условие начала пластического течения – условие начала образования шейки – можно приближенно принять в виде

$$-\rho_p h \frac{dw}{dt} > Y_p \quad (26)$$

Считается, что материал отрывается от преграды в момент начала образования шейки.

Для исследования полученных уравнений используются безразмерные переменные $h = \bar{h}l$, $\delta = \bar{\delta}l$, $v = \bar{v}v_0$, $u = \bar{u}v_0$, $t = \bar{t}l/v_0$, $u_0 = \bar{u}_0v_0$. В дальнейшем черту опускаем.

Решение системы будем искать как функцию параметра h – глубины проникания. Согласно (22-25)

$$\frac{dv}{dh} = -\frac{\alpha \gamma - 1}{\delta u \gamma} \quad (27)$$

$$\frac{d\delta}{dh} = -\frac{(v-u) \gamma - 1}{u \gamma} \quad (28)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(1 + \frac{f_3}{f_2} h\right) u \frac{du}{dh} = \frac{\alpha \mu}{f_2} + \frac{\mu}{2f_2} v^2 - \frac{\mu}{2f_2} u^2 - \frac{f_3}{2f_2} \frac{\gamma}{\gamma-1} u^2 - \alpha \kappa \frac{f_1}{2f_2} \quad (29)$$

С условиями при $h=0$: $\delta = \delta_0$; $u = u_0$; $v = 1$, где безразмерные параметры α , μ , κ соответственно равны

$$\alpha = \frac{\sigma_s}{\rho_s v_0^2}, \quad \mu = \frac{\rho_s}{\rho_p} \quad \text{и} \quad \kappa = \frac{\rho_s}{\rho_p} \cdot \frac{Y_p}{\sigma_s}.$$

Параметр $\alpha \ll 1$ в рассматриваемом диапазоне скоростей. Так как $\alpha \ll 1$, то на начальном этапе процесса соударения $v = 1 = const$.

Тогда для определения δ и u имеется система уравнений

$$\frac{d\delta}{dh} = -\frac{(1-u) \gamma - 1}{u \gamma} \quad (30)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(1 + \frac{f_3}{f_2} h\right) u \frac{du}{dh} = \frac{\mu}{2f_2} - \alpha \kappa \frac{f_1}{2f_2} - \left(\frac{\mu}{2f_2} + \frac{f_3}{2f_2} \frac{\gamma}{\gamma-1}\right) u^2 \quad (31)$$

Слагаемое $\alpha \kappa \frac{f_1}{2f_2}$ сохранено в уравнении, поскольку значение f_1 на порядок превышает значение f_2 .

Интегрируя (31)

$$(1 + d_0 h)^{d_2} (1 - d_1 u^2) = 1 - d_1 u_0^2, \quad (32)$$

$$u = \sqrt{\frac{1}{d_1} \left(1 - \frac{1 - d_1 u_0^2}{(1 + d_0 h)^{d_2}}\right)} \quad (33)$$

где $d_0 = f_3 / f_2$, $d_1 = \frac{(\gamma-1)\mu + f_3 \gamma}{(\mu - \alpha \kappa f_1)(\gamma-1)}$ и $d_2 = 1 + \frac{\mu \gamma - 1}{f_3 \gamma}$.

Данное соотношение определяет значение u как функцию глубины проникания.

Для определения закона изменения размера струны в направлении движения имеем уравнение (29).

Из (29,32), получается следующее соотношение

$$\delta = \delta_0 + \frac{\gamma-1}{\gamma} h - \frac{\gamma-1}{\gamma} \int_0^h \sqrt{\frac{d_1}{1 - \frac{1 - d_1 u_0^2}{(1 + d_0 x)^{d_2}}}} dx. \quad (34)$$

Второй этап наступает, когда размер струны в направлении движения становится достаточно малым. Он характеризуется быстрым убыванием скорости наружного края. Отметим, что это наступает тогда, когда значение δ имеет тот же порядок, что и α . Как показано в [3] при определении глубины проникания данным этапом можно пренебречь.

Третий этап – движение по инерции, когда значением δ можно пренебречь и положить $u = v$. Для определения u имеем уравнение

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}(1+d_0h)u \frac{du}{dh} = -\frac{d_0}{2} \frac{\gamma}{\gamma-1} u^2 - \alpha\kappa \frac{f_1}{2f_2} \quad (35)$$

Данное соотношение представим в виде

$$(1+d_0h)2u \frac{du}{dh} = -(d_0u^2 + d_3) \quad (36)$$

где $d_3 = \alpha\kappa \frac{f_1}{f_2} \frac{\gamma-1}{\gamma}$.

Поскольку участок пути, на котором происходит изменение скорости внешнего края струны, мал, то движение приближенно можно разбить на два этапа.

Первый этап – внешний край струны имеет постоянную скорость, струна растекается в кратере. Этап описывается системой уравнений (30-31) с начальными условиями $v(0) = 1$, $u(0) = u_0 < 1$ (как правило, принимается $u(0) = 0$), $\delta(0) = \delta_0$. Зависимость $u(h)$ определяется соотношением (33), а $\delta(h)$ соотношением (34). Условие окончания первого этапа движения имеет вид $\delta(h) = 0$. Пусть этому моменту соответствуют значения $u = u_1$, $h = h_1$. Когда моделируется растекание струны, то принимается значение $\delta(0) = \delta_0 = \frac{\pi}{2}$ из соображений сохранения энергии, хотя формально должно быть $\delta_0 = 2$. В дальнейшем полагаем, что $1,5 < \delta_0 < 2$.

Значение h соответствующее полному растеканию ударника определяется уравнением

$$\sqrt{d_1} \int_0^h \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1+d_0x)^{d_2}}}} dx - h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \delta_0. \quad (37)$$

Исследуем предельные случаи этого уравнения. Заметим, что $d_2 > 1$.

При $d_2 \rightarrow 1$, имеем $d_1 \rightarrow \infty$. Тогда $h \rightarrow 0$. Тогда для определения h имеем приближенное соотношение

$$\begin{aligned} \sqrt{d_1} \int_0^h \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1+d_2d_0x)}}} dx - h &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \delta_0, \quad \sqrt{d_1} \int_0^h \sqrt{\frac{1+d_2d_0x}{d_2d_0x}} dx - h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \delta_0. \\ \sqrt{d_1} \int_0^h \sqrt{\frac{1}{d_2d_0x}} dx &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \delta_0, \quad 2\sqrt{\frac{d_1}{d_2d_0}} h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \delta_0. \\ h &= \frac{d_2d_0}{4d_1} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \delta_0 \right)^2 \end{aligned} \quad (38)$$

Заметим, что нижнюю оценку h можно получить из следующих соображений

Так как $(1+d_0x)^{d_2} > 1+d_2d_0x$, то

$$\begin{aligned}
\sqrt{d_1} \int_0^h \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{(1+d_0x)^{d_2}}}} dx - h &= \sqrt{d_1} \int_0^h \left(\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{(1+d_0x)^{d_2}}} - 1} \right) dx + (\sqrt{d_1} - 1)h \leq \\
&\leq \sqrt{d_1} \int_0^h \left(\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{(1+d_2d_0x)}}} - 1 \right) dx + (\sqrt{d_1} - 1)h = \sqrt{d_1} \int_0^h \left(\sqrt{\frac{1+d_2d_0x}{d_2d_0x}} - 1 \right) dx + (\sqrt{d_1} - 1)h \leq \\
&\leq \sqrt{d_1} \int_0^h \left(\sqrt{\frac{1}{d_2d_0x}} \right) dx + (\sqrt{d_1} - 1)h = 2\sqrt{\frac{d_1}{d_2d_0}}\sqrt{h} + (\sqrt{d_1} - 1)h
\end{aligned}$$

Таким образом, нижнюю оценку h дает решение уравнения

$$2\sqrt{\frac{d_1}{d_2d_0}}\sqrt{h} + (\sqrt{d_1} - 1)h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\delta_0 \quad (39)$$

При $d_1 \rightarrow \infty$ решение этого уравнения стремится к значению, полученному соотношением (38).

При $d_2 \rightarrow \infty$ оценку решения (34) можно получить из следующих соображений. Поскольку $(1+d_0x)^{d_2} \rightarrow \infty$, то уравнение (34) можно приближенно представить в виде

$$\begin{aligned}
(\sqrt{d_1} - 1)h &= \frac{\gamma}{\gamma - 1}\delta_0 \\
h &= \frac{1}{(\sqrt{d_1} - 1)} \frac{\gamma}{\gamma - 1}\delta_0
\end{aligned} \quad (40)$$

Заметим, что это соотношение дает верхнюю оценку решения.

Поскольку $d_2 = 1 + \mu \frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma}$, то при малых значениях μ , решение будет определяться соотношением близким к (38).

С учетом поправок для $0 < \mu < 1$ рассмотрим соотношение

$$h = \frac{d_2d_0}{4d_1} \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\delta_0 \right)^2 \left(1 + \mu^2 \frac{2}{3} \frac{\gamma - 1}{\gamma}\delta_0 \right) (1 - 0.5\alpha\kappa f_1) \quad (41)$$

Расчет по тому соотношению и сравнение с численным решением дает следующие результаты.

Например, при соударении стального ударника со стальной преградой: при $v_0 = 2$

наибольшая погрешность достигается при $\gamma = 5$, $\delta_0 = 1.7$ и равна

$$h_c = 0.31, h_m = 0.37, \text{ относительная погрешность} = 17\%$$

$$u_c = 0.21, u_m = 0.23, \text{ относительная погрешность} = 8\%$$

при $v_0 = 4$

наибольшая погрешность достигается при $\gamma = 5$, $\delta_0 = 2$ и равна

$$h_c = 0.56, h_m = 0.65, \text{ относительная погрешность} = 15\%$$

$$u_c = 0.39, u_m = 0.42, \text{ относительная погрешность} = 7\%$$

При соударении алюминиевой сетки со стальным ударником при $v_0 = 4$ наибольшая погрешность достигается при $\gamma = 3, \delta_0 = 2$ и равна

$$h_c = 0.209, h_m = 0.195, \text{ относительная погрешность} = 7\%$$

$$u_c = 0.128, u_m = 0.124, \text{ относительная погрешность} = 3\%$$

То есть, соотношение (41) дает приемлемую точность в рассматриваемом интервале значений.

Для $\mu > 1$ единую формулу подобрать трудно, но тенденция к приближению результатов к результатам формулы (40) прослеживается.

При соударении алюминиевой сетки со стальным ударником следует ожидать, что h окажется достаточно большим. Тогда для определения h можно использовать приближенное уравнение

$$\sqrt{d_1} \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{(1+d_0x)^{d_2}}{(1+d_0x)^{d_2}-1}} - 1 \right) dx + (\sqrt{d_1} - 1)h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \delta_0.$$

Например, при $\mu = 2.88$ (стальная сетка алюминиевый ударник) неплохую аппроксимацию дает формула

$$h = \frac{1}{(\sqrt{d_1} - 1)} \frac{\gamma}{\gamma-1} \delta_0 - \frac{1}{(\sqrt{d_1} - 1)} \frac{\gamma}{\gamma-1} (0.09(\gamma-1) + 0.7).$$

Расчеты, показывают

при $v_0 = 2$

наибольшая погрешность достигается при $\gamma = 5, \delta_0 = 1.5$ и равна

$$h_c = 2.594, h_m = 2.859, \text{ относительная погрешность} = 10\%$$

$$u_c = 0.812, u_m = 0.818, \text{ относительная погрешность} = 0.1\%$$

при $v_0 = 3$

наибольшая погрешность достигается при $\gamma = 5, \delta_0 = 1.5$ и равна

$$h_c = 5.157, h_m = 5.069, \text{ относительная погрешность} = 2\%$$

$$u_c = 0.8988, u_m = 0.8986, \text{ относительная погрешность} \text{ менее } 0.1\%$$

при $v_0 = 4$

наибольшая погрешность достигается при $\gamma = 5, \delta_0 = 1.5$ и равна

$$h_c = 7.05, h_m = 6.62, \text{ относительная погрешность} = 6\%$$

$$u_c = 0.9224, u_m = 0.9221, \text{ относительная погрешность} \text{ менее } 0.1\%$$

при $v_0 = 5$

наибольшая погрешность достигается при $\gamma = 5, \delta_0 = 1.5$ и равна

$$h_c = 8.32, h_m = 7.65, \text{ относительная погрешность} = 8\%$$

$$u_c = 0.9225, u_m = 0.9223, \text{ относительная погрешность} \text{ менее } 0.1\%$$

Заметим, что скорость с приемлемой точностью можно принять равной $u = \frac{1}{\sqrt{d_1}}$.

На первом этапе происходит ускорение материала выдавленного слоя. На втором этапе начинается его торможение. В этот момент может произойти отрыв выдавленного слоя.

Условие начала образования шейки (26) в безразмерном виде представляется соотношением

$$-\frac{1}{\gamma-1}h\frac{du}{dt} > \alpha\kappa \quad (42)$$

Поскольку отрыв может произойти только на втором этапе движения, а значение $\frac{du}{dt}$ равно

$$\frac{du}{dt} = \frac{\gamma}{\gamma-1}u\frac{dh}{dh},$$

то, используя соотношения (35,36), получаем следующее условие отрыва

$$\frac{h}{2(1+d_0h)}\frac{1}{\alpha\kappa}\frac{\gamma}{(\gamma-1)^2}(d_0u^2+d_3) > 1 \quad (43)$$

Второй этап – движение по инерции. Характер движения определяется уравнением (36) с начальными условиями $u = u_1$ при $h = h_1$. Решение данного уравнения имеет вид

$$\frac{d_0u^2+d_3}{d_0u_1^2+d_3} = \frac{1+d_0h_1}{1+d_0h}. \quad (44)$$

С учетом (44) условие образования шейки примет вид

$$\frac{1}{\alpha\kappa}\frac{h(1+d_0h_1)}{2(1+d_0h)^2}\frac{\gamma}{(\gamma-1)^2}(d_0u_1^2+d_3) > 1 \quad (45)$$

Если при $h = h_1$, $u = u_1$ условие (41) не выполнено, то есть

$$\frac{1}{\alpha\kappa}\frac{h_1}{2(1+d_0h_1)}\frac{\gamma}{(\gamma-1)^2}(d_0u_1^2+d_3) < 1, \quad (46)$$

то в момент полного растекания ударника отрыв не происходит и значение h , соответствующее моменту отрыва, определяется из уравнения

$$\frac{1}{\alpha\kappa}\frac{h(1+d_0h_1)}{2(1+d_0h)^2}\frac{\gamma}{(\gamma-1)^2}(d_0u_1^2+d_3) = 1.$$

Данное уравнение является квадратным уравнением относительно h .

Представим данное уравнение в виде

$$d_0^2h^2 + (2d_0 - d_5)h + 1 = 0,$$

где $d_5 = \frac{1}{\alpha\kappa}\frac{(1+d_0h_1)}{2}\frac{\gamma}{(\gamma-1)^2}(d_0u_1^2+d_3)$.

Его решение, интересующее нас, имеет вид

$$h = \frac{-(2d_0 - d_5) - \sqrt{(2d_0 - d_5)^2 - 4d_0^2}}{2d_0^2}$$

Если данное уравнение не имеет решений или полученное решение будет $h < h_1$, то отрыва не происходит, а глубина кратера h определяется соотношением (44)

$$\frac{d_0 u^2 + d_3}{d_0 u_1^2 + d_3} = \frac{1 + d_0 h_1}{1 + d_0 h},$$

полагая $u = 0$, то есть

$$(1 + d_0 h) d_3 = (d_0 u_1^2 + d_3)(1 + d_0 h_1), \quad d_0 d_3 h = d_0 u_1^2 + d_0^2 u_1^2 h_1 + d_0 d_3 h_1$$

$$h = \frac{1}{d_3} (d_3 h_1 + d_0 u_1^2 h_1 + u_1^2)$$

После образования первого осколка расчет происходит по следующей схеме: Скорость в момент отрыва осколка обозначим $u = u_n$ (для первого осколка $n=1$).

Дальнейшее движение определяется соотношением (44), полагая $h_1 = 0$

$$\frac{d_0 u^2 + d_3}{d_0 u_n^2 + d_3} = \frac{1}{1 + d_0 h}$$

Условие образования следующего осколка примет вид

$$\frac{1}{\alpha \kappa} \frac{h}{2(1 + d_0 h)^2} \frac{\gamma}{(\gamma - 1)^2} (d_0 u_n^2 + d_3) = 1$$

Его решение имеет вид

$$h_{n+1} = \frac{(d_5 - 2d_0) - \sqrt{(d_5 - 2d_0)^2 - 4d_0^2}}{2d_0^2},$$

где $d_5 = \frac{1}{\alpha \kappa} \frac{1}{2} \frac{\gamma}{(\gamma - 1)^2} (d_0 u_n^2 + d_3)$.

Скорость, соответствующая моменту отрыва, определяется соотношением

$$\frac{d_0 u_{n+1}^2 + d_3}{d_0 u_n^2 + d_3} = \frac{1}{1 + d_0 h_{n+1}}, \quad d_0 u_{n+1}^2 + d_3 = \frac{d_0 u_n^2 + d_3}{1 + d_0 h_{n+1}}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 - d_3 h_{n+1}}{1 + d_0 h_{n+1}}}$$

Если уравнение $\frac{1}{\alpha \kappa} \frac{h}{2(1 + d_0 h)^2} \frac{\gamma}{(\gamma - 1)^2} (d_0 u_n^2 + d_3) = 1$ не имеет решений,

то дальнейшего образования осколков не происходит, а глубина кратера определяется соотношением (44), полагая $u = 0$

$$\frac{d_3}{d_0 u_n^2 + d_3} = \frac{1}{1 + d_0 h}, \quad 1 + d_0 h = \frac{d_0 u_n^2 + d_3}{d_3}, \quad h = \frac{u_n^2}{d_3}$$

Сравним результаты расчетов.

Диаметр струны и расстояние между струнами: $2l \times 2L = 0.6 \text{ мм} \times 2.6 \text{ мм}$.

Данные для материалов приведены в таблице 4.

Таблица 4.

Материал	$\rho, \text{ g/cm}^3$	$Y, \text{ GPa}$
Сплав алюминия	2.71	0.38
Сталь	7.85	1.0

В таблице 5 даны номер фрагмента, масса и энергия образующихся при ударе системы стальных струн по алюминиевой преграде при скорости удара 4 км/сек, полученные при расчете по схеме [1,2].

Таблица 5.

Номер	Длина	Масса	Скорость	Энергия
1	7.95240	53.0160	0.273678	1.98544
2	0.261782	1.74521	0.265886	0.616892E-01
3	0.273001	1.82001	0.257845	0.605006E-01
4	0.285248	1.90165	0.249530	0.592033E-01
5	0.298670	1.99113	0.240911	0.577807E-01
6	0.313445	2.08963	0.231953	0.562133E-01
7	0.329809	2.19872	0.222612	0.544802E-01
8	0.348019	2.32013	0.212836	0.525499E-01
9	0.368427	2.45618	0.202558	0.503880E-01
10	0.391447	2.60965	0.191693	0.479471E-01
11	0.417651	2.78434	0.180129	0.451711E-01
12	0.447746	2.98497	0.167716	0.419816E-01
13	0.482698	3.21799	0.154238	0.382771E-01
14	0.523829	3.49219	0.139374	0.339182E-01
15	0.572990	3.81993	0.122601	0.287085E-01
16	0.632876	4.21917	0.102957	0.223618E-01
17	0.707590	4.71727	0.782545E-01	0.144437E-01
18	0.803714	5.35809	0.398600E-01	0.425651E-02

Примечание: глубина кратера – 0.294064; глубина проникания в преграду – 12.0811; суммарная масса – 102.742; суммарная энергия – 2.71531; энергия ударника – 11.5277.

В таблице 6 даны номер фрагмента, масса и энергия образующихся при ударе системы стальных струн по алюминиевой преграде при скорости удара 4 км/сек, полученные при расчете по инженерной модели.

Таблица 6.

Номер	Длина	Масса	Скорость	Энергия
1	7.81167	52.0778	0.273813	1.95224
2	0.261725	1.74483	0.266023	0.617396E-01
3	0.273011	1.82007	0.257985	0.605684E-01
4	0.285338	1.90225	0.249672	0.592896E-01
5	0.298857	1.99238	0.241056	0.578866E-01
6	0.313760	2.09173	0.232100	0.563414E-01
7	0.330263	2.20176	0.222762	0.546289E-01
8	0.348653	2.32435	0.212989	0.527214E-01
9	0.369271	2.46181	0.202714	0.505814E-01
10	0.392568	2.61712	0.191852	0.481645E-01
11	0.419114	2.79409	0.180292	0.454113E-01
12	0.449644	2.99763	0.167883	0.422434E-01
13	0.485170	3.23446	0.154409	0.385582E-01
14	0.527056	3.51370	0.139549	0.342127E-01
15	0.577240	3.84827	0.122780	0.290061E-01

16	0.638565	4.25710	0.103142	0.226441E-01
17	0.715371	4.76914	0.784509E-01	0.146759E-01
18	0.814693	5.43129	0.401232E-01	0.437184E-02

Примечание: глубина кратера – 0.301802; глубина проникания в преграду – 12.0106; суммарная масса – 102.080; суммарная энергия – 2.68528; энергия ударника – 11.5277.

Все величины приведены в безразмерном виде. Масса нормирована на величину $\rho_p l^2$, кинетическая энергия нормирована на величину $\frac{1}{2} \rho_p l^2 v_0^2$.

Таким образом, данная упрощенная модель дает приемлемое совпадение с моделью, представленной в [1,2].

ВЫВОДЫ

Разработана инженерная модель оценки количества, массы и энергии фрагментов, возникающих при взаимодействии высокоскоростного ударника со струнной преградой.

Модель работает по следующей схеме.

Исходные параметры: $2L$ – расстояние между струнами; $2l$ – поперечный размер струны; δ – размер струны в направлении удара; v_0 – скорость ударника; пределы текучести материала струн σ_s , ударника Y_p ; плотности материала струн ρ_s , ударника ρ_p .

На основании данных параметров вычисляются следующие безразмерные величины

$$\gamma = L/l, \quad \alpha = \frac{\sigma_s}{\rho_s v_0^2}, \quad \mu = \frac{\rho_s}{\rho_p} \quad \text{и} \quad \kappa = \frac{\rho_s}{\rho_p} \cdot \frac{Y_p}{\sigma_s};$$

$$f_1(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\gamma-1}} + 2 \frac{\ln \gamma}{\gamma-1} + 2 \cdot \sqrt{\gamma-1} + 4 + 2 \ln \gamma + 4 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right\},$$

$$f_2(\gamma) = \frac{5}{6} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}},$$

$$f_3(\gamma) = \frac{1}{\gamma-1};$$

$$d_0 = f_3 / f_2, \quad d_1 = \frac{(\gamma-1)\mu + f_3 \gamma}{(\mu - \alpha \kappa f_1)(\gamma-1)}, \quad d_2 = 1 + \frac{\mu}{f_3} \frac{\gamma-1}{\gamma}, \quad d_3 = \alpha \kappa \frac{f_1}{f_2} \frac{\gamma-1}{\gamma}.$$

В дальнейшем рассматриваются безразмерные величины: линейные размеры нормированы на l , скорости на v_0 .

Имеют место два этапа процесса.

Первый этап до полного растекания струны. В конце этапа, как правило, происходит отрыв первого фрагмента. Его размер определяется соотношениями:

При $0 < \mu < 1$ имеем

$$h = \frac{d_2 d_0}{4 d_1} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \delta_0 \right)^2 \left(1 + \mu^2 \frac{2}{3} \frac{\gamma-1}{\gamma} \delta_0 \right) (1 - 0.5 \alpha \kappa f_1).$$

Скорость

$$u = \sqrt{\frac{1}{d_1} \left(1 - \frac{1 - d_1 u_0^2}{(1 + d_0 h)^{d_2}} \right)}.$$

При $1 < \mu$ единую формулу подобрать трудно, но для больших значений μ , для конкретных соотношений это удастся сделать.

Например, при $\mu = 2.88$ (стальная сетка алюминиевый ударник) неплохую аппроксимацию дает формула

$$h = \frac{1}{(\sqrt{d_1} - 1)^{\gamma - 1}} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \delta_0 - \frac{1}{(\sqrt{d_1} - 1)^{\gamma - 1}} \frac{\gamma}{\gamma - 1} (0.09(\gamma - 1) + 0,7).$$

$$u = \sqrt{\frac{1}{d_1} \left(1 - \frac{1 - d_1 u_0^2}{(1 + d_0 h)^{d_2}} \right)}.$$

Второй этап после полного растекания струны – движение по инерции.

Для вычисления размеров фрагментов h_i и их скоростей u_i имеют место следующие рекуррентные соотношения

$$h_{n+1} = \frac{(d_5 - 2d_0) - \sqrt{(d_5 - 2d_0)^2 - 4d_0^2}}{2d_0^2}$$

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 - d_3 h_{n+1}}{1 + d_0 h_{n+1}}},$$

где $d_5 = \frac{1}{\alpha \kappa} \frac{1}{2} \frac{\gamma}{(\gamma - 1)^2} (d_0 u_n^2 + d_3).$

Если $(d_5 - 2d_0)^2 - 4d_0^2 < 0$, то образование следующего фрагмента не происходит, глубина кратера определяется соотношением

$$h = \frac{u_n^2}{d_3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Estimating parameters of fragments forming at penetration of periodic system of strings into a semy-infinite target* // International Journal of Impact Engineering. – 2013. – Vol.61. – Pp.13-23.
2. Головешкин В.А., Мягков Н.Н. *Оценка параметров фрагментов, возникающих при проникании периодической системы струн в массивную преграду* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №2. – С.190-212.

REFERENCES

1. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Estimating parameters of fragments forming at penetration of periodic system of strings into a semy-infinite target*. International Journal of Impact Engineering, 2013, Vol.61, Pp.13-23.

2. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Otsenka parametrov fragmentov, vznikaiushchikh pri pronikanii periodicheskoi sistemy strun v massivnuiu pregradu [Estimating parameters of fragments forming at penetration of periodic system of strings into a massive barrier]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2012, Vol.18, No.2, Pp.190-212.

Поступила в редакцию 1 марта 2017 года

Сведения об авторах:

Беляев Вадим Павлович – студент, Московский технологический университет, г. Москва, Россия; e-mail: vadim5557@yandex.ru

Головешкин Василий Адамович – д.т.н., проф., Кафедра высшей математики Московского технологического университета; в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: nikshevolog@yandex.ru