

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА СИСТЕМУ «ГОЛОВА-ШЛЕМ»

Бойко А.В.<sup>1</sup>, Зуев В.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия*

<sup>2</sup>*ФГБОУ ВО «Московский технологический университет», г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

В рамках точной постановки задач механики континуума рассматриваются проблемы динамического воздействия на человека. Особое внимание уделяется ударному воздействию на систему «голова-шлем». Показана динамика зон разрушения защитной конструкции при различных скоростях удара, получены значения важнейших динамических и кинематических характеристик в различных характерных точках системы «голова-шлем». Разработанное для решения динамических задач прикладное программное обеспечение позволяет изучать поведение разнообразных защитных композитных преград при различных ударных воздействиях и иметь информацию о значениях любых кинематических и динамических величин в любых точках рассматриваемой системы в любой момент времени. Предложенный подход и прикладное программное обеспечение позволяют рассматривать и проводить полный анализ динамических воздействий на конструкции, материалы которых обладают различными усложненными свойствами: разупрочнение, переменные упругие свойства, необратимые объемные деформации, перекрестные влияния первых двух инвариантов тензоров напряжений и деформаций, в частности, явления дилатансии и т.д. [1-5]. Все это дает возможность прогнозировать процессы деформаций и разрушений для широкого класса динамических задач; при этом существенно сокращаются расходы на дорогостоящие экспериментальные исследования. В настоящей работе рассмотрение ведется в рамках осесимметричной постановки. Для описания необратимого деформирования применена обобщенная модель пластичности Мизеса, причем предел пластичности может как расти, так и убывать до определенных предельных значений, характеризующих разрушение. Определяющие соотношения для необратимых деформаций сформулированы в пространстве деформаций и дают возможность описывать как упрочнение, так и разупрочнение. Приведена полная система дифференциальных уравнений, описывающая динамические процессы в изучаемых телах. На основе метода конечных элементов предложена и реализована эффективная численная схема расчета поставленных задач. Приведены результаты расчетов для двух характерных скоростей ударного нагружения:  $v = 60 \text{ км/ч}$  и  $v = 200 \text{ км/ч}$ . Показано, что при  $v = 60 \text{ км/ч}$  необратимые деформации имеют место только в шлеме, а при  $v = 200 \text{ км/ч}$  происходит разрушение шлема, черепной коробки и основания черепа.

**Ключевые слова:** динамические воздействия; человек – защитная конструкция; упруго-пластические материалы; деформирование и разрушение

## MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC IMPACT ON THE SYSTEM «HEAD-HELMET»

Boyko A.V.<sup>1</sup>, Zuev V.V.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Mechanics of Lomonosov MGU, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Moscow Technological University, Moscow, Russia*

## ABSTRACT

Within the framework of the exact formulation of the problems of continuum mechanics, problems of dynamic impact on man are considered. Particular attention is paid to the impact on the «head-helmet» system. The dynamics of the zones of destruction of the protective structure at various impact rates is shown, the values of the most important dynamic and kinematic characteristics at various characteristic points of the «head-helmet» system are obtained. Developed for solving dynamic problems, application software allows you to study the behavior of various protective composite barriers for various impact impacts and to have information about the values of any kinematic and dynamic quantities at any points of the system at any one time. The proposed approach and applied software allow to consider and carry out a full analysis of dynamic effects on structures whose materials have various complicated properties: softening, variable elastic properties, irreversible volume deformations, cross effects of the first two invariants of stress and strain tensors, in particular dilatancy and Etc. [1-5]. All this makes it possible to predict the processes of deformation and destruction for a wide class of dynamic problems; while the cost of expensive experimental research is significantly reduced. In the present paper, the analysis is carried out in the framework of an axisymmetric formulation. To describe irreversible deformation, the generalized model of Mises plasticity is applied, and the plasticity limit can both grow and decrease to certain limiting values characterizing the destruction. Defining relations for irreversible deformations are formulated in the space of deformations and give the opportunity to describe both hardening and softening. A complete system of differential equations describing the dynamic processes in the studied bodies is given. On the basis of the finite element method, an effective numerical scheme for calculating the tasks is proposed and implemented. The results of calculations for two characteristic velocities of impact loading are presented: 60 km/h and 200 km/h. It is shown that at 60 km/h irreversible deformations occur only in the helmet, and at 200 km/h the helmet, cranium and skull base are destroyed.

**Keywords:** dynamic effects; people – the protective structure; elastic-plastic materials; deformation and fracture

Исследование высокоскоростного деформирования упруго-пластических тел является важной частью проектирования различных материалов и конструкций [6-15]. В настоящее время все большее значение приобретает изучение динамических воздействий на человека, в частности, при разнообразных техногенных катастрофах. В частности, только в автомобильных катастрофах в России ежегодно погибает более 20 тысяч человек. При этом особое значение имеет изучение ударных воздействий на жизненно важные области тела человека, в частности на голову. Здесь необходимо отметить как экспериментальные подходы к изучению динамических воздействий [16,17], так и приближенные теоретические методы [18]. Однако, эти методы являются весьма дорогостоящими и кроме того не дают возможность всесторонне изучить динамические воздействия в широком диапазоне параметров воздействий на защитные конструкции. В настоящей работе впервые с общих позиций механики континуума делается попытка проанализировать динамические воздействия на систему «голова-шлем», в частности, при ударных воздействиях с характерными скоростями.

Полная система уравнений динамического воздействия на упруго-пластические материалы при условии отсутствия каких-либо температурных эффектов имеет вид [2]

$$\rho \dot{u}_i = F_i + \nabla_k \sigma_i^k,$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{ij}^p &= A_{ij}^{mn} \dot{\varepsilon}_{mn}, \\
\dot{\sigma}_{ij}^p &= M^{ijmn} \dot{\varepsilon}_{mn}, \\
\dot{\varepsilon}_{mn} &= \frac{1}{2} (\nabla_n u_m + \nabla_m u_n),
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $F_i$  – проекции на оси заданных массовых сил,  $\nabla_k$  – ковариантная производная по  $k$ -ой координате. Неизвестные функции:  $u_i$  – компоненты вектора скорости,  $\sigma^{ij}$  – компоненты тензора напряжения,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора полных деформаций,  $\varepsilon_{ij}^p$  – компоненты тензора пластических деформаций. Величины  $A_{ij}^{mn}$ ,  $M^{ijmn}$  определяются заданием свободной энергии  $\Phi = \Phi(\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p)$  ( $\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p$  – упругие деформации) и функции деформирования  $\psi = \psi(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$

$$\begin{aligned}
A_{ij}^{mn} &= h_\varepsilon H F_{ijkl} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{mn}}; \\
M^{ijmn} &= a^{ijkl} (\delta_k^m \delta_l^n - A_{kl}^{mn}); \\
H &= H_1 H_2, \quad H_1 = H_1(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi > 0, \\ 0, & \psi < 0. \end{cases} \quad H_2 = H_2(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi > 0, \\ 0, & \psi \leq 0, \end{cases} \quad \dot{\psi} = \frac{d'\psi}{dt}; \\
d'\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Величины  $F_{klj} = F_{klj}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$  определяются из формул:

$$d\varepsilon^{*ij} = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e \partial \varepsilon_{kl}^e} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^p \partial \varepsilon_{kl}^p} \right) d\varepsilon_{kl}^p, \text{ если их разрешить относительно приращений пластических деформаций } d\varepsilon_{kl}^p = F_{klj} d\varepsilon^{*ij}.$$

Для свободной энергии среды полагаем:  $\Phi = \frac{1}{2} a^{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e$ ,  $a^{ijkl}$  – упругие постоянные, причем в случае изотропных материалов, упругие свойства которых определяются двумя скалярными величинами, например модулем объемного сжатия  $K$  и модулем сдвига  $G$ , имеем

$$a^{ijkl} = \frac{3K - 2G}{3} \delta^{ij} \delta^{kl} + 2G \delta^{ik} \delta^{jl}, \tag{3}$$

где  $\delta_k^m$  – символы Кронекера.

Для необратимых деформаций используются определяющие соотношения, сформулированные в пространстве деформаций [2], позволяющие описывать различные виды необратимого деформирования и разрушения

$$d\varepsilon_{kl}^p = h_\varepsilon H F_{klj} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} d'\psi, \quad h_\varepsilon = - \left( F_{klj} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{kl}^p} \right)^{-1}, \tag{4}$$

где  $d'\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}$ . При  $\psi = 0, d'\psi > 0$  (активное нагружение в пространстве деформаций); при  $\psi < 0$  (упругая область),  $\psi = 0, d'\psi \leq 0$  изменение пластических деформаций не происходит.

В настоящей работе для описания необратимых деформаций и разрушений используется обобщение модели Мизеса с переменным пределом текучести [2]

$$\psi(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 2G\sqrt{(e_{ij} - e_{ij}^p)(e^{ij} - e^{pij})} - C, \tag{5}$$

где  $C = C_0 - \alpha\sqrt{I_2^p}$ .  $I_2^p = \frac{1}{2}e_{ij}^p e^{pij}$  – интенсивность пластических деформаций сдвига  $e_{ij}^p, e_{ij}$  – компоненты девиатора тензора полной деформации,  $e_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p, C_0$  – начальный предел разрушения,  $\alpha$  – коэффициент, определяющий интенсивность изменения предела текучести. Положительным значениям  $\alpha$  соответствует падение предела прочности (разупрочнение) до значений  $C_r$ , соответствующего разрушению, отрицательным – упрочнение, при  $\alpha = 0$  имеет место идеальная пластичность.

Рассмотрим в рамках осесимметричной постановки задачу о нормальном ударе по защитной преграде (шлему). Материалы шлема и костной ткани представляют собой деформируемые упруго-пластические среды, проявляющие свойства упрочнения, разупрочнения или постоянства предела текучести при изменении пластических деформаций. Считаем, что ось  $z$  направлена вертикально вверх против направления скорости удара и является осью симметрии, ось  $r$  ей ортогональна (рис.1).

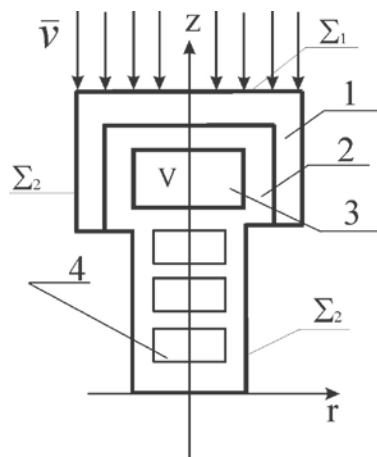


Рис.1. Модель головы в шлеме. 1 – шлем, 2 – костная ткань, 3 – мозг, 4 – шейные позвонки.

В рассматриваемом случае функция нагружения для обобщенной модели Мизеса, имеет вид

$$\varphi = \sqrt{2(S_r^2 + S_z^2 + S_r S_z + S_{rz}^2)} - C, \tag{6}$$

где  $S_r, S_z, S_{rz}$  – компоненты девиатора тензора напряжений.

Из ассоциированного закона, сформулированного в пространстве деформаций (6), получаем

$$\dot{\varepsilon}_r^p = \frac{S_r}{CH_\varepsilon} \dot{\psi}, \quad \dot{\varepsilon}_z^p = \frac{S_z}{CH_\varepsilon} \dot{\psi}, \quad \dot{\varepsilon}_{rz}^p = \frac{S_{rz}}{CH_\varepsilon} \dot{\psi} \quad (7)$$

где  $H_\varepsilon = h_\varepsilon^{-1}$  – функция упрочнения в пространстве деформаций.

В силу пластической несжимаемости, имеющей место при использовании обобщенной модели Мизеса, имеем

$$\varepsilon_\theta^p = -\varepsilon_r^p - \varepsilon_z^p. \quad (8)$$

Для величины  $\dot{\psi}$  имеем в данном случае выражение

$$\dot{\psi} = \frac{2G}{C} [S_r (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta) + S_z (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_\theta) + 2S_{rz} \dot{\varepsilon}_{rz}], \quad (9)$$

где  $\dot{\varepsilon}_r$ ,  $\dot{\varepsilon}_z$ ,  $\dot{\varepsilon}_\theta$ ,  $\dot{\varepsilon}_{rz}$  – компоненты тензора скоростей деформаций.

Так как согласно формулам Стокса

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad 2\dot{\varepsilon}_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad (10)$$

то для  $\dot{\psi}$  получим

$$\dot{\psi} = \frac{2G}{C} \left[ S_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + S_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + S_{rz} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r} (S_r + S_z) \right]. \quad (11)$$

Функция упрочнения в пространстве деформаций  $H_\varepsilon$  в предположении справедливости зависимости  $C = C(I_2^p)$  в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned} H_\varepsilon &= 2G \left[ 1 + \frac{C'}{C} e^{pij} (e_{ij} - e_{ij}^p) \right] = 2G + \frac{C'}{C} e_{ij}^p S^{ij} = \\ &= 2G + \frac{C'}{C} \varepsilon_{ij}^p S^{ij} = 2G + \frac{C'}{C} \left[ (2\varepsilon_r^p + \varepsilon_z^p) S_r + (2\varepsilon_z^p + \varepsilon_r^p) S_z + 2S_{rz} \varepsilon_{rz}^p \right], \quad (12) \\ C' &= \frac{dC}{dI_2^p} \end{aligned}$$

причем интенсивность пластических деформаций  $I_2^p$  вычисляется по формуле

$$I_2^p = \frac{1}{2} e_{ij}^p e^{pij} = \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_r^p)^2 + (\varepsilon_z^p)^2 + (\varepsilon_r^p + \varepsilon_z^p)^2 + 2(\varepsilon_{rz}^p)^2 \right]. \quad (13)$$

Объединяя уравнения движения с соотношениями, вытекающими из закона Гука и соотношениями ассоциированного закона, для девяти неизвестных функций  $u_r$ ,  $u_z$ ,  $S_r$ ,  $S_z$ ,  $S_{rz}$ ,  $p$ ,  $\varepsilon_r^p$ ,  $\varepsilon_z^p$ ,  $\varepsilon_{rz}^p$  имеем следующую систему девяти дифференциальных уравнений, описывающих динамические процессы в рассматриваемых средах

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{\partial S_r}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} &= \frac{2S_r + S_z}{r}, \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} - \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial S_z}{\partial z} &= \frac{S_{rz}}{r}, \\ \frac{\partial S_r}{\partial t} + 4G \left( D - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2AG \frac{\partial u_z}{\partial r} + 2AG \frac{\partial u_r}{\partial z} + 2G \left( M + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 2G \left[ (M + 2D) - \frac{1}{3} \right] \frac{u_r}{r}, \\ \frac{\partial S_z}{\partial t} + 2G \left( M + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2BG \frac{\partial u_z}{\partial r} + 2BG \frac{\partial u_r}{\partial z} + 4G \left( E - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 2G \left[ (M + 2E) - \frac{1}{3} \right] \frac{u_r}{r}, \\ \frac{\partial S_{rz}}{\partial t} + 2AG \frac{\partial u_r}{\partial r} + G(2F - 1) \frac{\partial u_z}{\partial r} + G(2F - 1) \frac{\partial u_r}{\partial z} + 2BG \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 2G(A + B) \frac{u_r}{r}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - 3K \frac{\partial u_r}{\partial r} - 3K \frac{\partial u_z}{\partial z} = 3K \frac{\partial u_r}{p}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial t} - 2D \frac{\partial u_r}{\partial r} - A \frac{\partial u_z}{\partial r} - A \frac{\partial u_r}{\partial z} - M \frac{\partial u_z}{\partial z} = -(M + 2D) \frac{u_r}{r},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_z^p}{\partial t} - M \frac{\partial u_r}{\partial r} - B \frac{\partial u_z}{\partial r} - B \frac{\partial u_r}{\partial z} - 2E \frac{\partial u_z}{\partial z} = -(M + 2E) \frac{u_r}{r},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{rz}^p}{\partial t} - A \frac{\partial u_r}{\partial r} - F \frac{\partial u_z}{\partial r} - F \frac{\partial u_r}{\partial z} - B \frac{\partial u_z}{\partial z} = -(A + B) \frac{u_r}{r},$$

$$A = \frac{2GH S_r S_{rz}}{H_\varepsilon C^2}, \quad B = \frac{2GH S_z S_{rz}}{H_\varepsilon C^2},$$

$$D = \frac{GH (S_r)^2}{C^2 H_\varepsilon}, \quad E = \frac{GH (S_z)^2}{C^2 H_\varepsilon}, \quad (15)$$

$$F = \frac{2GH (S_{rz})^2}{F^2 C^2}, \quad M = \frac{2GH}{C^2 H_\varepsilon} S_r S_z,$$

где  $p$  – первый инвариант тензора напряжений (давление).

На контактных границах областей 1-4 принимается условие прилипания. В начальный момент времени искомые функции принимаются равными нулю. В качестве граничных условий принимается отсутствие внешних нагрузок на поверхности  $\Sigma_2$ , а на поверхности  $\Sigma_1$  задается скорость удара. Свойства материалов, использованных в расчетах [19]:

- 1) костная ткань: плотность – 1,95 г/см<sup>3</sup>, модуль сдвига – 1,2 ГПа, коэффициент объемного сжатия – 79 ГПа, начальный предел текучести – 0,1 ГПа, предел текучести при разрушении – 0,05 ГПа;
- 2) позвонки: плотность – 1,8 г/см<sup>3</sup>, модуль сдвига – 1,1 ГПа, коэффициент объемного сжатия – 70 ГПа, начальный предел текучести – 0,08 ГПа, предел текучести при разрушении – 0,04 ГПа;
- 3) шлем (стеклопластик): плотность – 1,9 г/см<sup>3</sup>, модуль сдвига – 26 ГПа, коэффициент объемного сжатия – 170 ГПа, начальный предел текучести – 0,4 ГПа, предел текучести при разрушении – 0,07 ГПа.

Для решения рассматриваемых динамических задач разработано прикладное программное обеспечение (ППО), позволяющее изучать динамику разнообразных защитных конструкций при различных ударных воздействиях и иметь информацию о любых кинематических и динамических величинах в любых точках рассматриваемой системы в любой момент времени.

Отметим, что ППО позволяет рассматривать различные материалы и различное количество слоев шлема. На рис.2а,б представлены наглядные результаты удара по верхней поверхности однослойного шлема со скоростями 60 км/ч и 200 км/ч. Черным (внешним) слоем обозначена защитная конструкция (шлем), темный серый – кость, черепная коробка, светло-серым – мозг. Из рисунков видно (при  $t=300$ мкс), что при скорости удара 60 км/ч, происходят пластические деформации шлема (область белого цвета), а при 200 км/ч происходит разрушение шлема, черепной коробки и основания черепа (область темно-серого цвета).

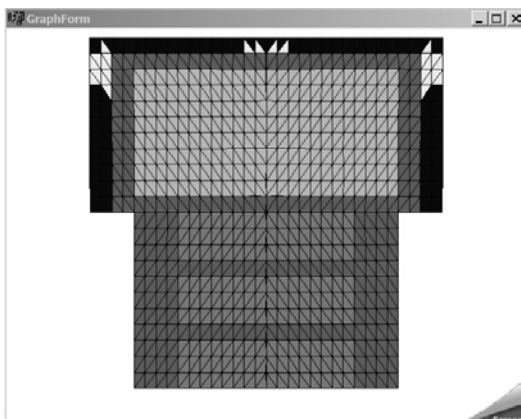


Рис.2а.  $V_1 = 60 \text{ км/ч}$

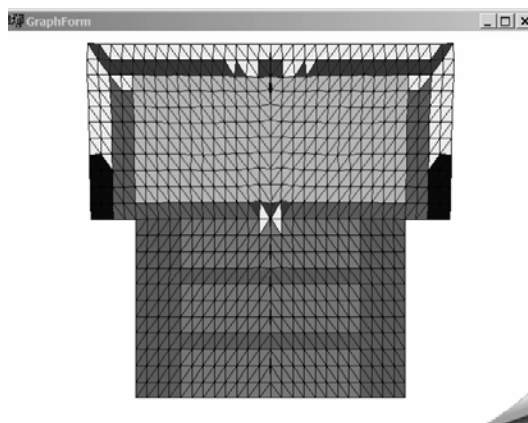


Рис.2б.  $V_1 = 200 \text{ км/ч}$

В результате расчетов, помимо приведенных наглядных примеров развития зон деформирования и разрушения на рис.2а,б, получены также значения скоростей, деформаций, напряжений и т.д. по всей рассматриваемой области. Предложенный подход и его численная реализация дают возможность всесторонне и наглядно исследовать ударное воздействие на человека и защитные конструкции в широком диапазоне скоростей удара при различных конфигурациях защитных преград.

На графиках рис.3а,б в качестве примера показано развитие во времени интенсивности пластических деформаций  $\sqrt{I_2^p}$  в центральной точке границы головы и шеи при различных скоростях удара.

Как видно из приведенных расчетов резкий рост интенсивности пластических деформаций в основании черепа при скорости удара в 200 км/ч наступает гораздо раньше, чем при скорости в 60 км/ч, причем максимум величины интенсивности пластических деформаций примерно в 3 раза больше.

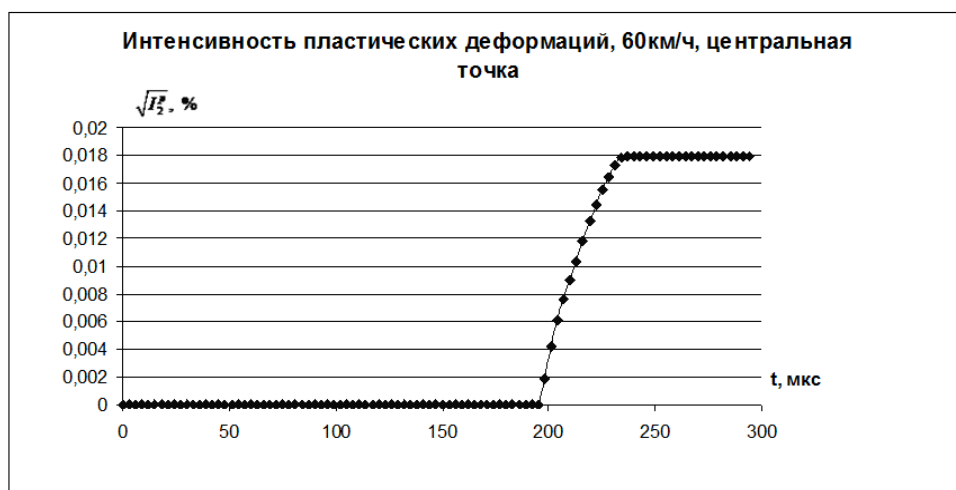


Рис.3а. Интенсивность пластических деформаций в центральной точке границы головы и шеи при 60 км/ч.

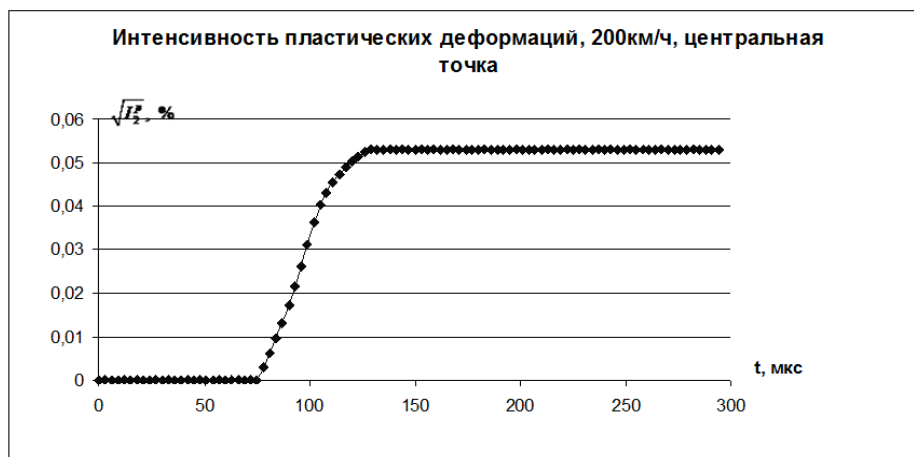


Рис.3б. Интенсивность пластических деформаций в центральной точке границы головы и шеи при 200 км/ч.

## ВЫВОДЫ

Таким образом, в данной работе впервые с общих позиций механики континуума с привлечением современных методов математического моделирования детально проанализированы динамические воздействия на систему «человек – защитная конструкция» в широком диапазоне характерных скоростей. Для решения динамических задач разработано прикладное программное обеспечение, которое позволяет изучать поведение разнообразных защитных композитных преград при различных ударных воздействиях и иметь информацию о значениях любых кинематических и динамических величин в любых точках рассматриваемой системы в любой момент времени. Предложенный подход и прикладное программное обеспечение позволяют рассматривать и проводить полный анализ динамических воздействий на конструкции, материалы которых обладают различными усложненными свойствами: разупрочнение, переменные упругие свойства, необратимые объемные деформации, перекрестные влияния первых двух инвариантов тензоров напряжений и деформаций. Дана наглядная картина зон разрушения, получены значения важнейших динамических и кинематических характеристик в жизненно важных точках. Предложенный подход и ППО позволяют проводить полный анализ динамических воздействий на систему «голова – шлем», при этом существенно сокращаются расходы на дорогостоящие экспериментальные исследования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зуев В.В. *Определяющие соотношения теории пластичности в пространствах деформаций и напряжений* // Доклады АН СССР. – 1978. – Т.242. – №4. – С.792-795.
2. Зуев В.В. *Определяющие соотношения и динамические задачи для упруго-пластических сред с усложненными свойствами*. – М.: Физматлит, 2006. – 174 с.



3. Зуев В.В., Шмелева А.Г. *Осесимметричное ударное нагружение упруго-пластической среды с разупрочнением и переменными упругими свойствами* // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. – №2(52). – С.100-106.
4. Зуев В.В., Шмелева А.Г., Наумов В.В. *О динамике пластических сред с разупрочнением: теория и задачи* / XI Всеросс. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. – Казань: Изд-во Казанского университета, 2015. – С.1527-1528.
5. Зуев В.В., Шмелева А.Г. *О динамическом нагружении пластических сред с усложненными свойствами* / Межд. научн. симп. по проблемам механики деформируемых тел «Упругость и неупругость», посвященного 105-й годовщине А.А. Ильюшина. Материалы. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2016. – С.165-169.
6. Холин Н.Н., Головешкин В.А., Андрущенко В.А. *Математическое моделирование волновых явлений в конденсированных средах и динамика метеороидов*. – М.: Ленанд, 2016. – 216 с.
7. Киселев А.Б., Сережкин А.А. *Особенности процесса деформирования и разрушения упругопластического цилиндра в широком диапазоне скоростей соударения с жесткой преградой* / XI Всеросс. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. – Казань: Изд-во Казанского университета, 2015. – С.135.
8. Зукас Дж. *Динамика удара*. – М.: Мир, 1985. – 296 с.
9. Киченко А.А. *Биомеханическое моделирование поведения губчатой костной ткани при изменении нагрузки* / XI Всеросс. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. – Казань: Изд-во Казанского университета, 2015. – С.136.
10. Зуев В.В. *Об ударном нагружении мишени из композиционных материалов* // Расчеты на прочность. Сб. научных статей. – М.: Машиностроение, 1989. – Вып.30. – С.148-155.
11. Ефимов А.Б., Зуев В.В., Майборода В.П. *Осесимметричное ударное нагружение материалов с учетом разупрочнения* // Изв. АН СССР, МТТ. – 1990. – №4.
12. Васин Р.А., Ленский В.С., Ленский Э.В. *Динамические зависимости между напряжениями и деформациями* // Проблемы динамики упругопластических сред. – М.: Мир, 1975. – Вып.5. – С.7-38.
13. Брагов А.М., Константинов А.Ю., Ломунов А.К., Филиппов А.Р. *Комплексная методика определения динамических свойств конструкционных материалов при высоких скоростях деформаций* // XI Всеросс. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. – Казань: Изд-во Казанского университета, 2015. – С.50.
14. Краус Е.И., Фомин В.М., Шабалин И.И. *Моделирование процесса соударения сложных двумерных тел о деформируемую преграду* // Вычислительные технологии. – 2006. – Т.11. – С.104-107.
15. Фомин В.М., Гулидов А.И., Шабалоин И.И. и др. *Высокоскоростное взаимодействие тел*. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 600 с.
16. Барер А.С., Конахевич Ю.Г., Шолпо Л.Н., Петлюк В.Х., Углонова Н.А. *Деформация черепа человека при ударе (экспериментальное изучение и некоторые проблемы моделирования)* // Механика композитных материалов. – 1980. – №2. – С.319-324.

17. Melvin J.W. *The measurement of the dynamic mechanical properties of human skull bone* // Appl. Polym. Symp. – 1969. – №12. – Pp.235-247.
18. Агапов П.И. *Численное моделирование механических факторов черепно-мозговой травмы* / Дисс канд. физ.-мат. наук., г. Долгопрудный, 2005.
19. Березовский В.А., Колотилов Н.Н. *Биофизические характеристики тканей человека*. Справочник. – Киев: Наукова Думка, 1990. – 224 с.

## REFERENCES

1. Zuev V.V. *Opredelivaiushchie sootnosheniia teorii plastichnosti v prostranstvakh deformatsii i napriazhenii* [The defining relations of the theory of plasticity in the spaces of deformations and stresses]. Doklady AN SSSR, 1978, Vol.242, No.4, Pp.792-795.
2. Zuev V.V. *Opredelivaiushchie sootnosheniia i dinamicheskie zadachi dlia uprugoplasticheskikh sred s uslozhnennymi svoistvami*. [Defining relations and dynamic problems for elastic-plastic media with complicated properties]. Moskva, Fizmatlit, 2006, 174 p.
3. Zuev V.V., Shmeleva A.G. *Osesimmetrichnoe udarnoe nagruzhenie uprugoplasticheskoi sredy s razuprochneniem i peremennymi uprugimi svoistvami* [Axisymmetric shock loading of an elastic-plastic medium with softening and variable elastic properties]. Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia, 2007, No.2(52), Pp.100-106.
4. Zuev V.V., Shmeleva A.G., Naumov V.V. *O dinamike plasticheskikh sred s razuprochneniem: teoriia i zadachi* [On the dynamics of plastic media with softening: theory and problems]. XI Vserossiiskii s'ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki, Sbornik trudov, Kazan', Izd-vo Kazanskogo universiteta, Pp.1527-1528.
5. Zuev V.V., Shmeleva A.G. *O dinamicheskom nagruzhenii plasticheskikh sred s uslozhnennymi svoistvami* [On the dynamic loading of plastic media with complicated properties]. Mezhdunarodnyi nauchnyi simpozium po problemam mekhaniki deformiruemykh tel "Uprugost' i neuprugost'", Materialy, Moskva, MGU im. M.V.Lomonosova, 2016, Pp.165-169.
6. Kholin N.N., Goloveshkin V.A., Andrushchenko V.A. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh iavlenii v kondensirovannykh sredakh i dinamika meteoroidov* [Mathematical modeling of wave phenomena in condensed media and dynamics of asteroids], Moskva, Lenand, 2016, 216 p.
7. Kiselev A.B., Serezhkin A.A. *Osobennosti protsessa deformirovaniia i razrusheniia uprugoplasticheskogo tsilindra v shirokom diapazone skorostei soudareniiia s zhestkoi pregradoi* [Features of the process of deformation and fracture of an elastoplastic cylinder in a wide range of impact velocities with a rigid obstacle]. XI Vserossiiskii s'ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki, Sbornik trudov, Kazan', Izd-vo Kazanskogo universiteta, P.135.
8. Zukas Dzh. *Dinamika udara* [Dynamics of impact]. Moskva, Mir, 1985, 296 p.
9. Kichenko A.A. *Biomekhanicheskoe modelirovanie povedeniia gubchatoi kostnoi tkani pri izmenenii nagruzki* [Biomechanical modeling of the behavior of spongy bone tissue under load changes] // XI Vserossiiskii s'ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki, Sbornik trudov, Kazan', Izd-vo Kazanskogo universiteta, P.136.

10. Zuev V.V. *Ob udarnom nagruzhenii misheni iz kompozitsionnykh materialov. Raschety na prochnost' [On shock loading of a target from composite materials // Calculations on the strength]*. Sb. nauchnykh statei, Moskva, Mishinostroenie, 1989, Iss.30, Pp.148-155.
11. Efimov A.B., Zuev V.V., Maiboroda V.P. *Osesimmetrichnoe udarnoe nagruzhenie materialov s uchetom razuprochneniia [Axisymmetric shock loading of materials with allowance for softening]*. Izv. AN SSSR, MTT, 1990, No.4.
12. Vasin R.A., Lenskii V.S., Lenskii E.V. *Dinamicheskie zavisimosti mezhdu napriazheniiami i deformatsiiami [Dynamic relationships between stresses and strains]*. Problemy dinamiki uprugoplasticheskikh sred, Moskva, Mir, 1975, Iss.5, Pp.7-38.
13. Bragov A.M., Konstantinov A.Iu., Lomunov A.K., Filippov A.R. *Kompleksnaia metodika opredeleniia dinamicheskikh svoistv konstruktsionnykh materialov pri vysokikh skorostiakh deformatsii [A complex technique for determining the dynamic properties of structural materials at high strain rates]*. XI Vserossiiskii s'ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki, Sbornik trudov, Kazan', Izd-vo Kazanskogo universiteta, P.50.
14. Kraus E.I., Fomin V.M., Shabalin I.I. *Modelirovanie protsessa soudareniia slozhnykh dvumernykh tel o deformiruemuui pregradu [Modeling the process of collision of complex two-dimensional bodies with a deformable obstacle]*. Vychislitel'nye tekhnologii, 2006, Vol.11, Pp.104-107.
15. Fomin V.M., Gulidov A.I., Shabaloin I.I. et al. *Vysokoskorostnoe vzaimodeistvie tel [High-speed interaction of bodies]*. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 1999, 600 p.
16. Barer A.S., Konakhevich Iu.G., Sholpo L.N., Petliuk V.Kh., Uglanova N.A. *Deformatsiia cherepa cheloveka pri udare (eksperimental'noe izuchenie i nekotorye problemy modelirovaniia) [Deformation of the human skull upon impact (experimental study and some modeling problems)]*. Mekhanika kompozitnykh materialov, 1980, No.2, Pp.319-324.
17. Melvin J.W. *The measurement of the dynamic mechanical properties of human skull bone*. Appl. Polym. Symp., 1969, No.12, Pp.235-247.
18. Agapov P.I. *Chislennoe modelirovanie mekhanicheskikh faktorov cherepno-mozgovoivoi travmy [Numerical modeling of the mechanical factors of craniocerebral trauma]*. Diss. kand. fiz.-mat. nauk, Dolgoprudnyi, 2005.
19. Berezovskii V.A., Kolotilov N.N. *Biofizicheskie kharakteristiki tkanei cheloveka [Biophysical characteristics of human tissues]*. Spravochnik. Kiev, Naukova Dumka, 1990, 224 p.

*Поступила в редакцию 3 февраля 2017 года*

---

Сведения об авторах:

Бойко Андрей Владимирович – вед.инж., Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; e-mail: [mailband@mail.ru](mailto:mailband@mail.ru)  
 Зув Владимир Васильевич – д.ф.-м.н., проф., ФГБОУ ВО «Московский технологический университет», г. Москва, Россия