

ЗАДАЧА О ТЕРМОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ, СОЕДИНЕННОГО С КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ, ПРИ СОЛНЕЧНОМ НАГРЕВЕ С УЧЕТОМ ТЕПЛОИЗЛУЧЕНИЯ*

Гришанина Т.В.¹, Русских С.В.¹, Шклярчук Ф.Н.²

¹*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)», г. Москва, Россия*

²*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются термоупругие изгибные колебания тонкостенного стержня с круговым поперечным сечением, соединенного упруго-вязким шарниром с космическим аппаратом и подвергающегося прямому солнечному излучению с учетом теплового потока, теряемого за счет внешнего излучения в космическое пространство, и лучистого теплообмена на внутренней поверхности оболочки стержня. Учитывается изменение углов падения солнечных лучей на поверхность стержня за счет его изгиба и поворота вместе с космическим аппаратом.

Уравнение нестационарной теплопроводности тонкой цилиндрической оболочки стержня решается путем разложения тепловых потоков и температуры в ряд по косинусам в окружном направлении с удержанием только осесимметричной и антисимметричной гармоник, пренебрегая изменением температуры в осевом направлении. Оно приводится к двум связанным между собой и с перемещениями стержня нелинейным дифференциальным уравнениям первого порядка по времени для осесимметричной и антисимметричной составляющих температуры в рассматриваемом поперечном сечении стержня.

Для решения нестационарной задачи термоупругости и теплопроводности стержня используется метод конечных элементов. При этом по длине конечного элемента изгиб аппроксимируется точным решением статической задачи, а температура – линейной функцией. Потенциальная энергия термоупругого изгиба конечного элемента стержня записывается через его поперечные перемещения, углы поворота и антисимметричные составляющие температуры на концах. При вычислении кинетической энергии вращения системы и относительных изгибных колебаний стержня с твердым телом на конце, стержень моделируется сосредоточенными массами и моментами инерции, приведенным к сечениям, разделяющие конечные элементы.

Получена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций – угла поворота космического аппарата, поперечных перемещений, углов поворота, осесимметричных и антисимметричных составляющих температуры в расчетных сечениях конечно-элементной модели стержня.

Выполнены расчеты динамического поведения системы при выходе ее из тени с оценками сходимости и устойчивости численного решения. Исследовано влияние теплоизлучения и некоторых упругих параметров стержня на колебания системы.

Ключевые слова: космические аппараты; упруго-вязкие шарниры; тонкостенные стержни; солнечный нагрев; теплоизлучение; термоупругие колебания; метод конечных элементов

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №15-08-06259а).

THE PROBLEM OF THERMOELASTIC OSCILLATIONS OF CONNECTED TO A SPACECRAFT ROD WITH SOLAR HEATING AND CONSIDERING OF HEAT RADIATION

Grishanina T.V.¹, Russkikh S.V.¹, Shklyarchuk F.N.²

¹*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

²*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

ABSTRACT

Thermoelastic flexural vibrations of a thin-walled rod with a circular cross section connected by an elastic-viscous hinge to a spacecraft and subjected to direct solar radiation are considered taking into account the heat flux lost due to external radiation into outer space and radiant heat transfer on the inner surface of the rod shell. The change of the angles of the sun rays incidence on the surface of the rod due to its bending and turning together with the spacecraft is taken into account.

The equation for the nonstationary thermal conductivity of a thin cylindrical shell of a rod is solved by expanding the heat fluxes and temperature in a series of cosines in the circumferential direction, with only axially symmetric and antisymmetric harmonics held, neglecting the temperature change in the axial direction. It is reduced to two first-order nonlinear differential equations connected with each other and with the displacement of the rod for the axisymmetric and antisymmetric components of the temperature in the considered cross-section of the rod.

To solve the nonstationary problem of thermoelasticity and thermal conductivity of the rod, the finite element method is used. In this case, the bend is approximated along the length of the finite element by an exact solution of the static problem, and the temperature by a linear function. The potential energy of thermoelastic bend of the final element of the rod is recorded through its transverse displacements, angles of rotation and antisymmetric components of temperature at the ends. When calculating the kinetic energy of rotation of the system and the relative flexural vibrations of the rod with a solid body at the end, the rod is modeled by the concentrated masses and moments of inertia reduced to the cross-sections separating the finite elements.

A system of nonlinear ordinary differential equations for unknown functions – the angle of rotation of the spacecraft, transverse displacements, rotation angles, axisymmetric and antisymmetric temperature components in the calculated cross-sections of the finite element model of the rod is obtained.

The dynamic behavior of the system is calculated when it leaves the shadow with estimates of the convergence and stability of the numerical solution. The influence of heat radiation and some elastic parameters of the rod on the oscillations of the system is studied.

Key words: space vehicles; elastic-viscous hinges; thin-walled rods; solar heating; heat radiation; thermoelastic vibrations; finite element method

ВВЕДЕНИЕ

На космических аппаратах (КА) в качестве антенн, удлинителей для различных приборов, а также штанг гравитационной стабилизации могут использоваться выдвигаемые тонкостенные стержни, образуемые навитой на барабан двухслойной предварительно напряженной металлической лентой. Если два слоя ленты, сваренных по боковым кромкам, после схода с барабана выгибаются в разные стороны, то получается трубчатый стержень с замкнутым контуром поперечного сечения, близким по форме к окружности. Такие стержни

могут иметь большую длину. При поворотах КА и под воздействием солнечных лучей они совершают термоупругие колебания. При определенных условиях в результате взаимодействия упругих и инерционных сил и температуры тонкостенные стержни, подвергающиеся солнечному нагреву, могут быть динамически неустойчивыми, совершая колебания типа термоупругого флаттера.

В работе [1] на основании дистанционных измерений было описано динамическое поведение спутника со стержнями гравитационной стабилизации после выхода из тени Земли в результате солнечного нагрева стержней, вызывающего их термоупругие колебания. В последующих работах [2,3] и др. были выполнены аналитические исследования динамической неустойчивости консольно-закрепленных тонкостенных стержней при солнечном нагреве в линеаризованной постановке с использованием разложения поперечных перемещений в ряд по собственным формам колебаний с оценками в одночленном и двухчленном приближениях.

В [4] была рассмотрена в нелинейной постановке статическая задача сильного изгиба длинного пустотелого тонкостенного стержня кругового поперечного сечения, подвергающегося солнечному нагреву с учетом влияния изгиба на угол падения солнечных лучей на поверхность стержня и с учетом внешнего и внутреннего излучения.

В [5] была рассмотрена задача об изгибных термоупругих колебаниях стержня, соединенного с КА, под действием солнечного нагрева без учета теплоизлучения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоское нестационарное движение КА с присоединенным к нему тонкостенным стержнем кругового поперечного сечения с грузом на конце, рис.1. Под действием приложенного к КА управляющего момента $M_0(t)$ и нестационарного солнечного нагрева с учетом теплоизлучения стержень совершает термоупругие колебания в плоскости падения солнечных лучей и поворачивается вместе с КА на угол $\varphi(t)$ относительно центра масс системы, который при этом движении системы остается неподвижным. Стержень соединен с КА с помощью упруго-вязкого шарнира и в исходном недеформированном состоянии при постоянной температуре является прямолинейным. Стержень направлен вдоль оси x связанной с КА подвижной (вращающейся с угловой скоростью $\dot{\varphi}(t)$) системы координат Oxy с началом в центре масс, рис.1.

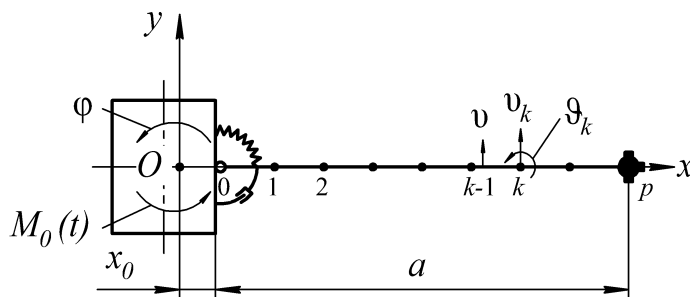


Рис.1. Модель КА.

Поперечные перемещения стержня $v(x,t)$ относительно оси x , возникающие при вращении и термоупругих колебаниях, будем считать малыми, а его продольными перемещениями будем пренебрегать. Для стержня со свободным концом, когда отсутствует стеснение продольных перемещений, и продольная сила в его поперечных сечениях близка к нулю, колебания можно считать малыми при $|\vartheta| \leq 0.5$ рад, где $\vartheta = \partial v / \partial x = v'$. Угол φ может быть большим.

Косинус угла между постоянным направлением солнечных лучей под углом γ в неподвижной системе координат O_*XY и нормалью к поверхности повернутого на угол φ и искривленного стержня с круглым недеформируемым поперечным сечением равен $\cos(\gamma - \varphi - \vartheta) \cos \theta$, рис.2.

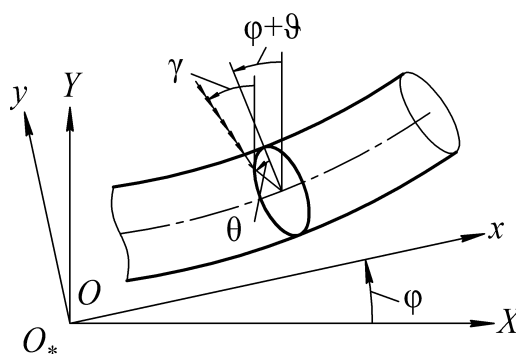


Рис.2. Направление теплового потока от прямого солнечного излучения.

Тепловой поток от прямого солнечного излучения на единицу внешней поверхности оболочки

$$q^* = \nu A_s S_0 \frac{L_0^2}{L^2} \cos(\gamma - \varphi - \vartheta) \cos \theta \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \geq \theta \geq -\frac{\pi}{2}, \quad (1)$$

$$q^* = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{2},$$

где A_s – коэффициент поглощения внешней поверхности стержня; $S_0 = 1400$ Вт/м²; $L_0 = 149 \cdot 10^9$ м – среднее расстояние от Земли до Солнца; L [м] – расстояние от КА до Солнца, [6]; $\nu(t)$ – коэффициент, учитывающий затененность стержня ($0 \leq \nu \leq 1$; $\nu = 0$ в тени планеты или КА и $\nu = 1$ при прямом солнечном освещении в космосе). Отраженный поток солнечного излучения от поверхности КА и планеты не учитывается.

Тепловой поток, теряемый за счет внешнего излучения в космическое пространство

$$q^e = c_0 \varepsilon^e \tau^4, \quad \tau = T / 100^\circ \quad (2)$$

где $c_0 = 5.77$ Вт/м²; ε^e – коэффициент черноты внешней поверхности оболочки.

Тепловой поток лучистого теплообмена на внутренней поверхности цилиндрической оболочки q^i определяется из интегрального уравнения [6,7] и зависит от коэффициентов c_0 и ε^i , где ε^i – коэффициент черноты внутренней поверхности оболочки.

Для получения уравнений термоупругих изгибных колебаний стержня с учетом его поворота вместе с КА на угол $\varphi(t)$ будем использовать метод конечных элементов. При этом стержень длиной a делится на конечные элементы поперечными сечениями $x = x_k$ с длинами $l_k = x_k - x_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, p$), начиная от шарнира ($k = 0, x = x_0$) до конца стержня ($k = p, x = x_p = x_0 + a$). В качестве обобщенных координат рассматриваются $v_k = v(x_k, t)$ и $\vartheta_k = v'(x_k, t)$ при $k = 0, 1, 2, \dots, p$; $v_0 = 0$ при шарнирном соединении стержня с КА.

2. ТЕМПЕРАТУРА ОБОЛОЧКИ СТЕРЖНЯ ПРИ СОЛНЕЧНОМ НАГРЕВЕ

Согласно (1), (2) тепловой поток при малых искривлениях стержня медленно изменяется в осевом направлении. Поэтому при определении температуры оболочки $T(x, \theta, t)$ ее изменением по длине стержня будем пренебрегать ($\partial^2 T / \partial x^2 \approx 0$) и будем считать ее постоянной в пределах толщины тонкой оболочки. Тогда уравнение нестационарной теплопроводности оболочки стержня в окружном направлении θ с учетом (1), (2) записывается в виде

$$c\rho h \frac{\partial T}{\partial t} = h\lambda \frac{\partial^2 T}{r^2 \partial \theta^2} + q^* - q^e - q^i, \quad (3)$$

где r, h – радиус и толщина оболочки; ρ, c, λ – плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала.

Решение уравнения (3) представим в виде ряда

$$T(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x, t) \cos n\theta,$$

который для безразмерных температур τ записывается в виде

$$\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \cos n\theta. \quad (4)$$

Потоки q^*, q^e и q^i также представляются в виде рядов по $\cos n\theta$.

Оценки, полученные при решении статической задачи термоупругого изгиба тонкостенного стержня при солнечном нагреве с учетом теплового излучения [4], показывают, что основной вклад в (4) при изгибе и изгибных колебаниях стержня в плоскости xu имеют члены с τ_0 и τ_1 . При $\tau = \tau_0 + \tau_1 \cos \theta$ уравнения теплового баланса для гармоник $n = 0$ и $n = 1$, которые получаются из уравнения (3) с учетом (1), (2) и решений для q_n^i , будут

$$c\rho h \cdot 100^\circ \dot{\tau}_0 + c_0 \varepsilon^e F_0(\tau_0, \tau_1) = \frac{1}{\pi} q^0 \cos(\gamma - \varphi - \vartheta),$$

$$c\rho h \cdot 100^\circ \dot{\tau}_1 + \frac{h\lambda}{r^2} 100^\circ \tau_1 + c_0 \left(\varepsilon^e + \frac{4\varepsilon^i}{4 - \varepsilon^i} \right) F_1(\tau_0, \tau_1) = \frac{1}{2} q^0 \cos(\gamma - \varphi - \vartheta), \quad (5)$$

$$F_0 = \tau_0^4 + 3\tau_0^2 \tau_1^2 + \frac{3}{8} \tau_1^4, \quad F_1 = 4\tau_0^3 \tau_1 + 3\tau_0 \tau_1^3, \quad q^0 = A_s S_0 \frac{L_0^2}{L^2}.$$

В пределах длины конечного элемента температура аппроксимируется по линейному закону ($\xi = x - x_{k-1}$) [8]

$$\tau_0 = \tau_{0,k-1} \left(1 - \frac{\xi}{l_k}\right) + \tau_{0,k} \frac{\xi}{l_k}, \quad \tau_1 = \tau_{1,k-1} \left(1 - \frac{\xi}{l_k}\right) + \tau_{1,k} \frac{\xi}{l_k}. \quad (6)$$

Уравнения (5) с учетом (6) записываются для всех расчетных сечений $k = 0, 1, 2, \dots, p$ путем замен $\tau_0 \rightarrow \tau_{0,k}, \tau_1 \rightarrow \tau_{1,k}, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_k, F_0 \rightarrow F_{0,k}, F_1 \rightarrow F_{1,k}$

$$c\rho h \cdot 100^\circ \dot{\tau}_{0,k} + c_0 \varepsilon^e F_{0,k}(\tau_{0,k}, \tau_{1,k}) = \frac{1}{\pi} q^0 \cos(\gamma - \varphi - \mathcal{G}_k),$$

$$c\rho h \cdot 100^\circ \dot{\tau}_{1,k} + \frac{h\lambda}{r^2} 100^\circ \tau_{1,k} + c_0 \left(\varepsilon^e + \frac{4\varepsilon^i}{4 - \varepsilon^i} \right) F_{1,k}(\tau_{0,k}, \tau_{1,k}) = \frac{1}{2} q^0 \cos(\gamma - \varphi - \mathcal{G}_k), \tag{7}$$

где $F_{0,k} = \tau_{0,k}^4 + 3\tau_{0,k}^2 \tau_{1,k}^2 + \frac{3}{8} \tau_{1,k}^4, F_{1,k} = 4\tau_{0,k}^3 \tau_{1,k} + 3\tau_{0,k} \tau_{1,k}^3$. Система уравнений (7) – система нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности для температур $\tau_{0,0}, \tau_{1,0}, \tau_{0,1}, \tau_{1,1}, \dots, \tau_{0,p}, \tau_{1,p}$, зависящих от углов поворота $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_p$.

3. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ СТЕРЖНЯ

В конечно-элементной модели стержня в качестве обобщенных координат, как было отмечено ранее, рассматриваются поперечные перемещения v_k и углы поворота \mathcal{G}_k в узлах, обусловленные его изгибом; $k = 0, 1, 2, \dots, p$. Погонную массу $m = 2\pi r h$ и погонный массовый момент инерции $i = \pi r^3 h$ будем заменять сосредоточенными в узлах массами μ_k , моментами инерции i_k и статическими моментами s_k .

Пусть стержень длиной a делится на конечные элементы с одинаковой длиной $l_k = l$. Представим его в виде дискретной системы сосредоточенных в узлах элементов с параметрами μ_k, i_k и s_k , соединенных невесомыми, абсолютно жесткими стержнями, рис.3. Эти параметры определим так, чтобы кинетическая энергия конечного элемента (КЭ), как абсолютно твердого тела, с распределенной массой и с сосредоточенными массами была одинаковой.

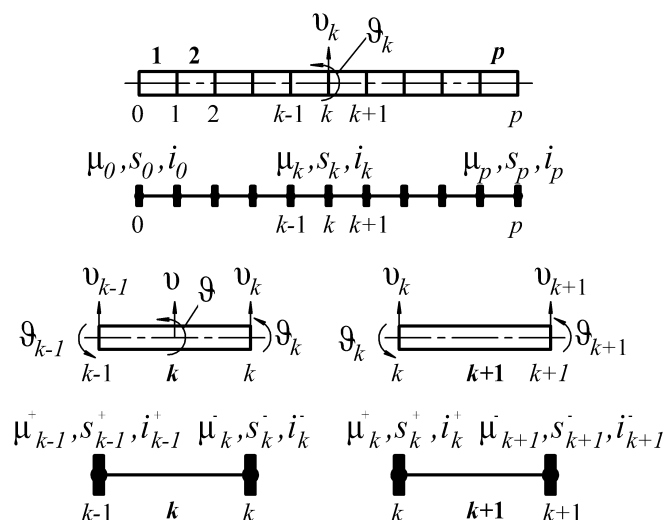


Рис.3. Конечно-элементная модель стержня.

Кинетическая энергия k -го КЭ ($k=1, 2, \dots, p$) однородной балки при повороте и поперечном перемещении, рис.3, с учетом $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{k-1}$, $v = v_{k-1} + \mathcal{G}_{k-1}x$, $v_k = v_{k-1} + \mathcal{G}_{k-1}l$, $\mathcal{G}_k = \mathcal{G}_{k-1}$ записывается в виде

$$T_k = \frac{1}{2} \int_0^l (m\dot{v}^2 + i\dot{\mathcal{G}}^2) dx = \frac{1}{2} [ml\dot{v}_{k-1}^2 + ml^2\dot{v}_{k-1}\dot{\mathcal{G}}_{k-1} + (\frac{ml^3}{3} + il)\dot{\mathcal{G}}_{k-1}^2]. \quad (8)$$

Для k -го КЭ с сосредоточенными параметрами выражение для кинетической энергии представляется следующим образом

$$T_k = (\frac{1}{2}\mu_{k-1}^+\dot{v}_{k-1}^2 + s_{k-1}^+\dot{v}_{k-1}\dot{\mathcal{G}}_{k-1} + \frac{1}{2}i_{k-1}^+\dot{\mathcal{G}}_{k-1}^2) + (\frac{1}{2}\mu_k^-\dot{v}_k^2 + s_k^-\dot{v}_k\dot{\mathcal{G}}_k + \frac{1}{2}i_k^-\dot{\mathcal{G}}_k^2)$$

или выполняя группировку

$$T_k = \frac{1}{2}(\mu_{k-1}^+ + \mu_k^-)\dot{v}_{k-1}^2 + (s_{k-1}^+ + s_k^- + \mu_k^-l)\dot{v}_{k-1}\dot{\mathcal{G}}_{k-1} + \frac{1}{2}(i_{k-1}^+ + i_k^- + \mu_k^-l^2 + 2s_k^-l)\dot{\mathcal{G}}_{k-1}^2. \quad (9)$$

В (9) учтено, что для однородной балки $\mu_{k-1}^+ = \mu_k^-$, $s_{k-1}^+ = -s_k^-$, $i_{k-1}^+ = i_k^-$. При этом: $\mu_k = \mu_k^- + \mu_k^+$, $s_k = s_k^- + s_k^+$, $i_k = i_k^- + i_k^+$, $k \neq 0, p$.

Сравнивая (8) и (9) получим

$$\mu_{k-1}^+ + \mu_k^- = ml, \quad s_{k-1}^+ + s_k^- + \mu_k^-l = \frac{ml^2}{2},$$

$$i_{k-1}^+ + i_k^- + \mu_k^-l^2 + 2s_k^-l = \frac{ml^3}{3} + il.$$

По определению $s_{k-1}^+ = \mu_{k-1}^+ \frac{l}{4}$, $s_k^- = -\mu_k^- \frac{l}{4}$, поэтому получаем

$$\mu_k^- = \frac{ml}{2}, \quad \mu_{k-1}^+ = \frac{ml}{2}, \quad i_k^- = \frac{il}{2} + \frac{ml^3}{24}, \quad i_{k-1}^+ = \frac{il}{2} + \frac{ml^3}{24}.$$

Окончательно для узлов $k=1, 2, \dots, p-1$ имеем

$$\mu_k = \mu_k^- + \mu_k^+ = ml, \quad s_k = s_k^- + s_k^+ = 0, \quad i_k = i_k^- + i_k^+ = il + \frac{ml^3}{12}. \quad (10)$$

Для узла $k=0$

$$\mu_0 = \mu_0^+ = \frac{ml}{2}, \quad s_0 = s_0^+ = \frac{ml^2}{8}, \quad i_0 = i_0^+ = \frac{il}{2} + \frac{ml^3}{24}. \quad (11)$$

Для узла $k=p$ необходимо учесть наличие груза на конце стержня

$$\mu_p = \mu_p^- + \mu_r = \frac{ml}{2} + \mu_r, \quad s_p = -s_p^- + s_r = -\frac{ml^2}{8} + s_r, \quad (12)$$

$$i_p = i_p^- + i_s = \frac{il}{2} + \frac{ml^3}{24} + i_r,$$

где μ_r , s_r , i_r – масса, статический момент и момент инерции груза, присоединенного на конце стержня при $x = x_p$.

В пределах длины k -го КЭ стержня при $0 \leq \xi \leq l_k$ используем линейную аппроксимацию температуры (6) и квазистатическую аппроксимацию поперечного перемещения [8]

$$\begin{aligned}
v &= v_{k-1}\eta_1(\xi) + \mathcal{G}_{k-1}\psi_1(\xi) + v_k\eta_2(\xi) + \mathcal{G}_k\psi_2(\xi); \\
\eta_1(\xi) &= 1 - 3\frac{\xi^2}{l_k^2} + 2\frac{\xi^3}{l_k^3}, \quad \psi_1(\xi) = \xi - 2\frac{\xi^2}{l_k} + \frac{\xi^3}{l_k^2}, \\
\eta_2(\xi) &= 3\frac{\xi^2}{l_k^2} - 2\frac{\xi^3}{l_k^3}, \quad \psi_2(\xi) = -\frac{\xi^2}{l_k} + \frac{\xi^3}{l_k^2}.
\end{aligned} \tag{13}$$

4. УРАВНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ, СОЕДИНЕННОГО С КА

Кинетическая энергия вращающейся с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ относительно центра масс системы с шарнирно присоединенным стержнем, совершающим малые поперечные колебания, с учетом (10), (11), (12) записывается в виде

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \sum_{k=0}^p [(\mu_k x_k + s_k)\dot{\varphi}\dot{v}_k + (s_k x_k + i_k)\dot{\varphi}\dot{\mathcal{G}}_k + \\
&+ \frac{1}{2}(\mu_k \dot{v}_k^2 + 2s_k \dot{v}_k \dot{\mathcal{G}}_k + i_k \dot{\mathcal{G}}_k^2)],
\end{aligned} \tag{14}$$

где J – момент инерции КА с присоединенным недеформируемым стержнем относительно их центра масс.

Потенциальная энергия поворота в упругом шарнире и термоупругого изгиба стержня

$$\Pi = \frac{1}{2}\kappa_0 \mathcal{G}_0^2 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+a} EI(v'' + 2\frac{\alpha}{r}100^\circ \tau_1)v'' dx, \tag{15}$$

где κ_0 – жесткость упругого шарнира по углу поворота \mathcal{G}_0 ; EI – изгибная жесткость тонкостенного стержня с моментом инерции поперечного сечения $I = \pi r^3 h$; α – коэффициент температурного расширения материала стержня.

В результате для конечно-элементной модели стержня выражение (15) с учетом (6) и (13) записывается в виде

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2}\kappa_0 \mathcal{G}_0^2 + \sum_{k=1}^p \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{12EI}{l_k^3} [(v_k - v_{k-1} - l_k \mathcal{G}_{k-1})^2 - \right. \\
&- l_k (v_k - v_{k-1} - l_k \mathcal{G}_{k-1})(\mathcal{G}_k - \mathcal{G}_{k-1}) + \frac{1}{3}l_k^2 (\mathcal{G}_k - \mathcal{G}_{k-1})^2] + \\
&+ EI \frac{\alpha}{r} 100^\circ [\tau_{1,k-1} (\frac{v_k - v_{k-1}}{l_k} - \mathcal{G}_{k-1}) - \tau_{1,k} (\frac{v_k - v_{k-1}}{l_k} - \mathcal{G}_k)] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Вариация работы управляющего момента $M_0(t)$ и демпфирующего момента $D_0(\dot{\mathcal{G}}_0, \mathcal{G}_0)$ в шарнире

$$\delta A = M_0 \delta \varphi - D_0 \delta \mathcal{G}_0. \tag{17}$$

Для обобщенных координат $\varphi, \mathcal{G}_0, v_1, \mathcal{G}_1, \dots, v_p, \mathcal{G}_p$ уравнения движения составляются как уравнения Лагранжа с учетом (14), (16), (17)

$$J\ddot{\varphi} + \sum_{k=0}^p [(\mu_k x_k + s_k)\ddot{v}_k + (s_k x_k + i_k)\ddot{\mathcal{G}}_k] = M_0(t),$$

$$\begin{aligned}
& (s_0 x_0 + i_0) \ddot{\varphi} + i_0 \ddot{\mathcal{G}}_0 + D_0 (\dot{\mathcal{G}}_0, \mathcal{G}_0) + (c_0 + 4 \frac{EI}{l_1}) \mathcal{G}_0 - 6 \frac{EI}{l_1^2} \nu_1 + 2 \frac{EI}{l_1} \mathcal{G}_1 - \\
& - \frac{\alpha EI}{r} 100^\circ \tau_{1,0} = 0, \\
& (\mu_k x_k + s_k) \ddot{\varphi} + \mu_k \ddot{\nu}_k + s_k \ddot{\mathcal{G}}_k + 6EI [-\frac{2}{l_k^3} \nu_{k-1} + (\frac{2}{l_k^3} + \frac{2}{l_{k+1}^3}) \nu_k - \frac{2}{l_{k+1}^3} \nu_{k+1} - \\
& - \frac{1}{l_k^2} \mathcal{G}_{k-1} - (\frac{1}{l_k^2} - \frac{1}{l_{k+1}^2}) \mathcal{G}_k + \frac{1}{l_{k+1}^2} \mathcal{G}_{k+1}] + EI \frac{\alpha}{r} 100^\circ [\frac{1}{l_k} \tau_{1,k-1} - \\
& - (\frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}}) \tau_{1,k} + \frac{1}{l_{k+1}} \tau_{1,k+1}] = 0, \\
& (s_k x_k + i_k) \ddot{\varphi} + s_k \ddot{\nu}_k + i_k \ddot{\mathcal{G}}_k + 6EI [\frac{1}{l_k^2} \nu_{k-1} - (\frac{1}{l_k^2} - \frac{1}{l_{k+1}^2}) \nu_k - \frac{1}{l_{k+1}^2} \nu_{k+1} + \\
& + \frac{1}{3l_k} \mathcal{G}_{k-1} + (\frac{2}{3l_k} + \frac{2}{3l_{k+1}}) \mathcal{G}_k + \frac{1}{3l_{k+1}} \mathcal{G}_{k+1}] + \delta_{kp} \frac{\alpha EI}{r} 100^\circ \tau_{1,p} = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $k = 1, 2, \dots, p$, $\nu_{p+1} = \mathcal{G}_{p+1} = \tau_{1,p+1} = 0$; $\delta_{kp} = 1$ при $k = p$ и $\delta_{kp} = 0$ при $k \neq p$.

Система уравнений (18) – система линейных уравнений термоупругих колебаний для обобщенных координат φ , \mathcal{G}_0 , ν_1 , \mathcal{G}_1 , ..., ν_p , \mathcal{G}_p , зависящих от температур $\tau_{1,0}$, $\tau_{1,1}$, ..., $\tau_{1,p}$. Связанные системы уравнений термоупругих колебаний (18) и теплопроводности (7) объединяются и решаются совместно.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ

В результате получается связанная система дифференциальных уравнений (7), (18), описывающих поворот КА, термоупругие колебания стержня и его нестационарную теплопроводность с учетом теплоизлучения и влияния угла поворота КА и изгиба стержня на углы падения солнечных лучей и, соответственно, на солнечный нагрев.

Данная система уравнений для интегрирования с помощью стандартной программы записывается в матричном виде (первому уравнению соответствует (18), второму – (7))

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{C}\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{Q}_1, \\
\mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{N}\mathbf{z} + \mathbf{B}\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{Q}_2,
\end{aligned} \tag{19}$$

где $\mathbf{q} = [\varphi \ \mathcal{G}_0 \ \nu_1 \ \mathcal{G}_1 \ \dots \ \nu_p \ \mathcal{G}_p]^T$ – вектор узловых перемещений и углов поворота; \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} – линейные симметричные матрицы инерции, демпфирования и жесткости; $\boldsymbol{\tau} = [\tau_{0,0} \ \tau_{1,0} \ \tau_{0,1} \ \tau_{1,1} \ \dots \ \tau_{0,p} \ \tau_{1,p}]^T$ – вектор узловых температур; \mathbf{C} , \mathbf{B} , \mathbf{T} – линейные симметричные матрицы температурных коэффициентов; \mathbf{z} – нелинейный вектор узловых температур; \mathbf{N} – нелинейная матрица температурных коэффициентов, коэффициенты которой зависят от вектора $\boldsymbol{\tau}$; \mathbf{Q}_1 – вектор правых частей, обусловленный приложенным моментом к аппарату; \mathbf{Q}_2 – нелинейный вектор правых частей, слагаемые которого зависят от вектора \mathbf{q} .

Система уравнений (19) решалась в программном комплексе компьютерной алгебры РТС MathCAD с помощью стандартной программы решения систем

дифференциальных уравнений AdamsBDF, реализующая метод Адамса («нежесткие системы») и метод обратного дифференцирования («жесткие системы») с автоматическим выбором между ними, исходя из входных данных.

Для оценки сходимости и устойчивости при интегрировании системы (19) с помощью алгоритма AdamsBDF рассматривалась тестовая задача со следующими исходными данными КА, стержня и груза: масса и собственный момент инерции КА равны $m_0 = 1200$ кг, $J_0 = 200$ кг·м²; тонкостенный стержень из стали – $\rho = 7800$ кг/м³, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $a = 30$ м, $r = 0.025$ м, $h = 0.0001$ м, $\alpha = 1.1 \cdot 10^{-5}$ 1/К, $c = 462$ Дж/кг·К, $\lambda = 50$ Вт/м, $A_s = 0.5$, $L_0 / L = 1$, $\varepsilon^e = 0.56$, $\varepsilon^i = 0.56$; груз – $\mu_r = 10$ кг, $i_r = 7.5$ кг·м², $s_r = 0$. Коэффициенты жесткости и демпфирования упруго-вязкого шарнира: $\kappa_0 = 100$ Н·м, $d_0 = 0$. Внешняя нагрузка отсутствует: $M_0(t) = 0$; угол падения солнечных лучей: $\gamma = -\pi/3$ рад. Начальные условия при $t = 0$: $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$; $\mathcal{G}_0 = 0$, $\dot{\mathcal{G}}_0 = 0$; $v_k = 0$, $\dot{v}_k = 0$, $\mathcal{G}_k = 0$, $\dot{\mathcal{G}}_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, p$); $\tau_{0,k} = 1.73$, $\tau_{1,k} = 0$ ($k = 0, 1, \dots, p$).

Было проведено три исследования: интегрирование системы с варьируемым числом конечных элементов; интегрирование системы с варьируемым шагом на заданном интервале; интегрирование системы с заданным постоянным шагом на различных больших интервалах. Сравнение результатов в рамках одного исследования проводилось по следующим параметрам системы: по углу поворота КА – φ ; по прогибу конца стержня – v_p ; по углу поворота конца стержня – \mathcal{G}_p ; по температуре на конце стержня – $\tau_{0,p}$ и $\tau_{1,p}$.

В первом случае интегрирование системы (19) выполнялось на интервале $0 \leq t \leq t_k = 50$ с при числе разбиений интервала интегрирования $N = 500$. Количество конечных элементов p , на которые разбивался стержень, варьировалось от 4 до 12, соответственно длина конечного элемента l изменялась в пределах от 7.5 м до 2.5 м. Результаты приведены в табл.1 для момента времени $t = 10$ с.

Таблица 1.

Сравнение результатов при варьировании количества конечных элементов.

p	φ , рад	v_p , м	\mathcal{G}_p , рад	$\tau_{0,p}$	$\tau_{1,p}$
4	0.032680431	-1.0434073	-0.066200214	1.7532017	0.043436004
6	0.032723947	-1.0441737	-0.066084485	1.7532025	0.043437122
8	0.032739105	-1.0444319	-0.066050211	1.7532028	0.043437608
10	0.032746338	-1.0445590	-0.065984435	1.7532030	0.043437803
12	0.032750295	-1.0446286	-0.065945279	1.7532030	0.043437891

Во втором случае интегрирование системы (19) выполнялось на интервале $0 \leq t \leq t_k = 50$ с при изменении числа разбиений интервала интегрирования N от 100 до 1000. При этом шаг интегрирования $\Delta t = t_k / N$ изменялся от 0.5 с до 0.05 с. Количество конечных элементов, на которые разбивался стержень, равнялось $p = 10$. Результаты приведены в табл.2 для момента времени $t = 10$ с.

В третьем случае интегрирование системы (19) выполнялось на продолжительных интервалах времени от $0 \leq t \leq t_k = 50$ с до $0 \leq t \leq t_k = 800$ с

при постоянном числе разбиений интервала $N = 500$. Количество конечных элементов, на которые разбивался стержень, равнялось $p = 10$. Сравнение проводилось по одноименным величинам в моменты времени $t = t_c$. Результаты приведены в табл.3.

Таблица 2.

Сравнение результатов при варьировании шага интегрирования.

N	φ , рад	v_p , м	\mathcal{G}_p , рад	$\tau_{0,p}$	$\tau_{1,p}$
100	0.030874582	-0.98558421	-0.063143062	1.7522358	0.041835849
200	0.032059213	-1.02293530	-0.065021666	1.7528401	0.042838704
400	0.032633178	-1.04099990	-0.065830769	1.7531425	0.043338096
500	0.032746338	-1.04455900	-0.065984435	1.7532030	0.043437803
1000	0.032970945	-1.05162090	-0.066285762	1.7533239	0.043637042

Таблица 3.

Сравнение результатов на больших интервалах интегрирования.

t_c , с	t_k , с	φ , рад	v_p , м	\mathcal{G}_p , рад	$\tau_{0,p}$	$\tau_{1,p}$
50	50	0.072348895	-2.3209319	-0.16731775	1.8530482	0.14894003
	100	0.072408238	-2.3226027	-0.16714886	1.8527955	0.14877993
	200	0.072566054	-2.3271625	-0.16690402	1.8522901	0.14845882
	400	0.073023367	-2.3407763	-0.16653113	1.8512798	0.14781289
	800	0.074352787	-2.3815806	-0.16709064	1.8492598	0.14650391
100	100	0.092729053	-2.9723653	-0.21252581	1.9746109	0.19340531
	200	0.092141853	-2.9541472	-0.21198724	1.9741456	0.19333046
	400	0.091066747	-2.9208913	-0.21127281	1.9732139	0.19317832
	800	0.089483891	-2.8720226	-0.21004337	1.9713458	0.19286456
200	200	0.107229560	-3.4289562	-0.23329043	2.1746664	0.19756662
	400	0.107322920	-3.4321992	-0.23384390	2.1739859	0.19760476
	800	0.106747650	-3.4151913	-0.23428349	2.1726191	0.19767624
400	400	0.094994992	-3.0400115	-0.20933493	2.3981260	0.17750607
	800	0.092224609	-2.9523820	-0.20506176	2.3975894	0.17756232

Результаты вычислений показывают, что процесс интегрирования при изменении различных параметров в заданных пределах является стабильным и сходящимся. Относительно небольшие расхождения наблюдаются при интегрировании на больших интервалах при вычислении прогиба конца стержня v_p , что видно из табл.3.

6. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

В качестве примера рассмотрим КА с упруго-вязко присоединенным к нему стержнем с грузом на конце, рис.1. Исходные параметры системы, общие для всех примеров расчета: масса и собственный момент инерции КА равны $m_0 = 1200$ кг, $J_0 = 200$ кг·м²; тонкостенный стержень из стали – $\rho = 7800$ кг/м³, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $a = 30$ м, $r = 0.025$ м, $h = 0.0001$ м, $\alpha = 1.1 \cdot 10^{-5}$ 1/К, $c = 462$ Дж/кг·К, $\lambda = 50$ Вт/м, $A_s = 0.5$, $L_0 / L = 1$, $\varepsilon^e = 0.56$, $\varepsilon^i = 0.56$; груз – $\mu_r = 10$ кг, $i_r = 5.5$ кг·м², $s_r = 0$. Коэффициенты жесткости и демпфирования упруго-вязкого шарнира:

$\kappa_0 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $d_0 = 0.05 \text{ Н}\cdot\text{м/с}$. Внешняя нагрузка отсутствует: $M_0(t) = 0$. Количество конечных элементов, на которые разбивается стержень, $p = 12$. Начальные условия при $t = 0$: $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$; $\vartheta_0 = 0$, $\dot{\vartheta}_0 = 0$; $v_k = 0$, $\dot{v}_k = 0$, $\vartheta_k = 0$, $\dot{\vartheta}_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, p$); $\tau_{0,k} = 1.73$, $\tau_{1,k} = 0$ ($k = 0, 1, \dots, p$). Интегрирование ведется на интервале $0 \leq t \leq t_k = 150 \text{ с}$ с количеством разбиений отрезка $N = 1500$.

6.1. Реакция стержня на действие солнечных лучей после выхода из тени.

Рассмотрим задачу о внезапном действии солнечных лучей на КА со стержнем после выхода из тени. При этом считается, что коэффициент затененности $\nu = 0$ при $t = 0$ и $\nu = 1$ при $t > 0$.

На рис.4-7 приведены зависимости $\varphi(t)$, $v_p(t)$, $\vartheta_p(t)$ и $T_p(t) = T_{0,p}(t) + T_{1,p}(t)$ (т.е. согласно (4) при $\theta = 0$) при варьировании угла падения солнечных лучей от $\gamma = -85^\circ$ до $\gamma = -60^\circ$. Эти значения углов соответствуют случаю, когда солнечные лучи освещают стержень со стороны свободного конца или груза $x = x_p = x_0 + a$.

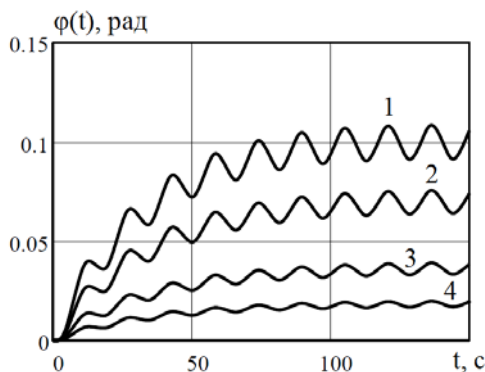


Рис.4. Зависимость φ от t .

1 – $\gamma = -60^\circ$; 2 – $\gamma = -70^\circ$; 3 – $\gamma = -80^\circ$;
4 – $\gamma = -85^\circ$.

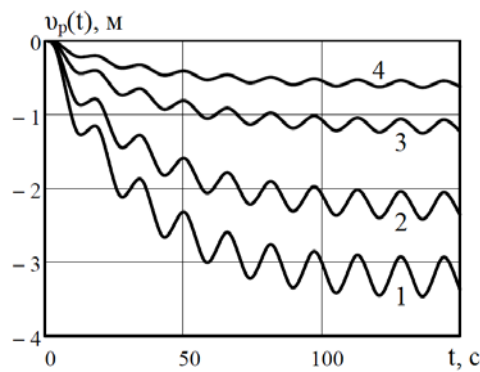


Рис.5. Зависимость v_p от t .

1 – $\gamma = -60^\circ$; 2 – $\gamma = -70^\circ$; 3 – $\gamma = -80^\circ$;
4 – $\gamma = -85^\circ$.

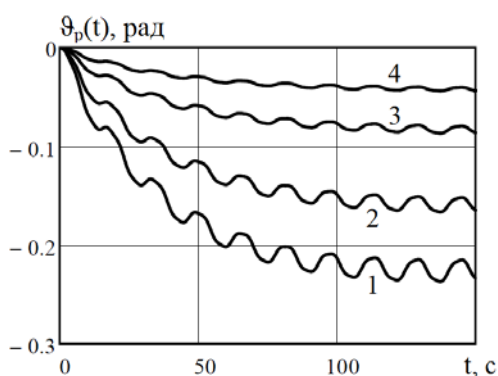


Рис.6. Зависимость ϑ_p от t .

1 – $\gamma = -60^\circ$; 2 – $\gamma = -70^\circ$; 3 – $\gamma = -80^\circ$;
4 – $\gamma = -85^\circ$.

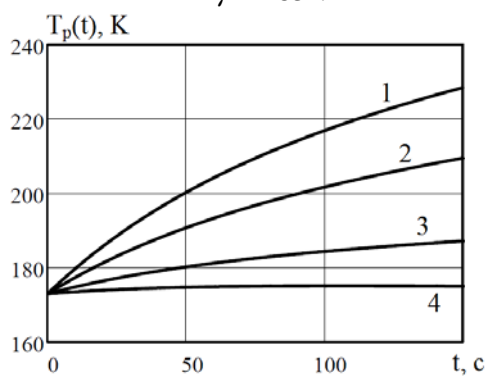


Рис.7. Зависимость T_p от t .

1 – $\gamma = -60^\circ$; 2 – $\gamma = -70^\circ$; 3 – $\gamma = -80^\circ$;
4 – $\gamma = -85^\circ$.

На рис.8-11 приведены зависимости $\varphi(t)$, $v_p(t)$, $\vartheta_p(t)$ и $T_p(t) = T_{0,p}(t) + T_{1,p}(t)$ при варьировании угла падения солнечных лучей от $\gamma = 60^\circ$

до $\gamma = 85^\circ$. Эти значения углов соответствуют случаю, когда солнечные лучи освещают стержень со стороны закрепленного конца или шарнира $x = x_0$.

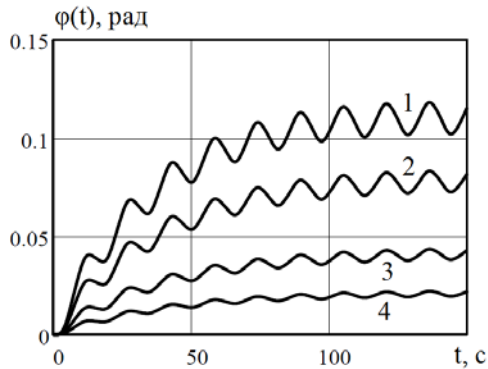


Рис.8. Зависимость φ от t .

1 – $\gamma = 60^\circ$; 2 – $\gamma = 70^\circ$; 3 – $\gamma = 80^\circ$;
4 – $\gamma = 85^\circ$.

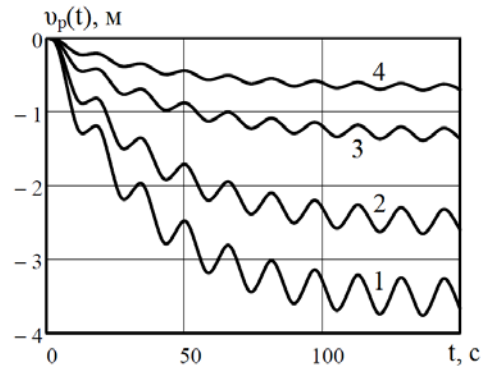


Рис.9. Зависимость ν_p от t .

1 – $\gamma = 60^\circ$; 2 – $\gamma = 70^\circ$; 3 – $\gamma = 80^\circ$;
4 – $\gamma = 85^\circ$.

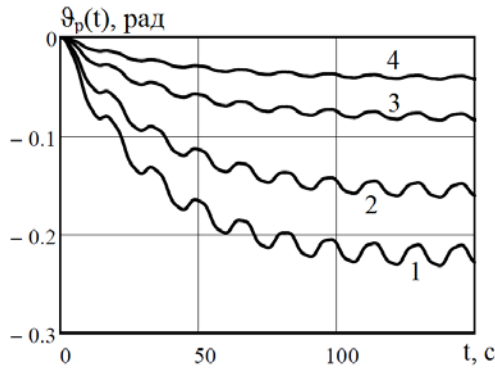


Рис.10. Зависимость ϑ_p от t .

1 – $\gamma = 60^\circ$; 2 – $\gamma = 70^\circ$; 3 – $\gamma = 80^\circ$;
4 – $\gamma = 85^\circ$.

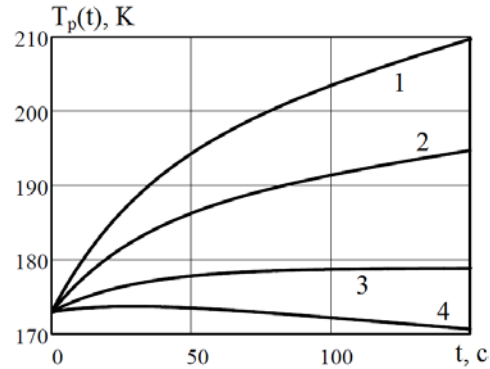


Рис.11. Зависимость T_p от t .

1 – $\gamma = 60^\circ$; 2 – $\gamma = 70^\circ$; 3 – $\gamma = 80^\circ$;
4 – $\gamma = 85^\circ$.

6.2. Сравнение решений, полученных с учетом излучения и без излучения.

Рассмотрим задачу о выходе из тени КА с тонкостенным стержнем при угле падения солнечных лучей $\gamma = -60^\circ$ в двух постановках: с учетом излучения и без учета. Также рассмотрим два частных случая для данных постановок, при которых не учитываются инерционные силы стержня. Это позволит оценить влияние нагрева стержня на общий характер движения системы.

На рис.12-15 приведены зависимости $\varphi(t)$, $\nu_p(t)$, $\vartheta_p(t)$ и $T_{1,p}(t)$ для четырех описанных выше вариантов. По рис.12-15 в масштабе графиков видно, что инерционные силы стержня не оказывают влияния на распределение температуры $T_{1,p}$.

6.3. Влияние параметров шарнира на колебания стержня

Рассмотрим влияние жесткости упруго-вязкого шарнира κ_0 на характер колебаний стержня при угле падения солнечных лучей $\gamma = -60^\circ$ с учетом

излучения. Как показывают исследования [9], коэффициент демпфирования существенного влияния на колебательный процесс не вносит.

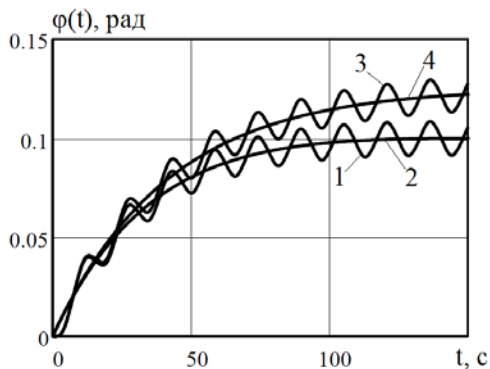


Рис.12. Зависимость φ от t .

- 1 – с учетом изл., с инер. силами;
- 2 – с учетом изл., без инер. сил;
- 3 – без учета изл., с инер. силами;
- 4 – без учета изл., без инер. сил.

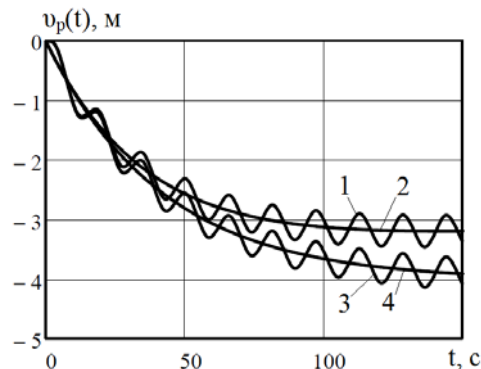


Рис.13. Зависимость v_p от t .

- 1 – с учетом изл., с инер. силами;
- 2 – с учетом изл., без инер. сил;
- 3 – без учета изл., с инер. силами;
- 4 – без учета изл., без инер. сил.

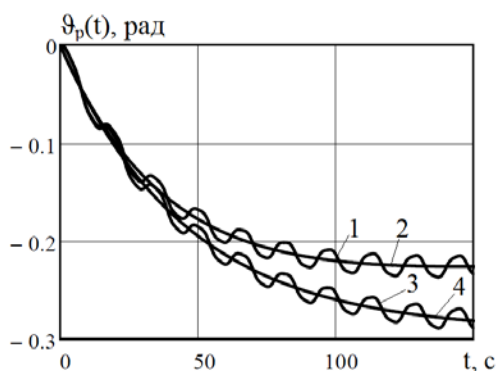


Рис.14. Зависимость φ_p от t .

- 1 – с учетом изл., с инер. силами;
- 2 – с учетом изл., без инер. сил;
- 3 – без учета изл., с инер. силами;
- 4 – без учета изл., без инер. сил.

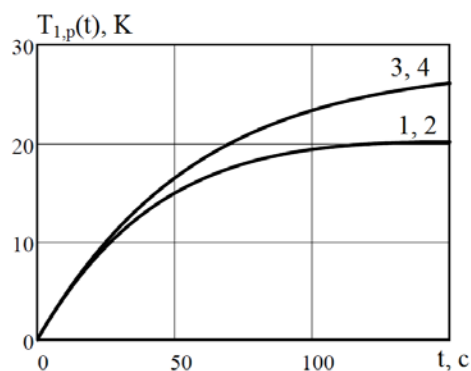


Рис.15. Зависимость $T_{1,p}$ от t .

- 1 – с учетом изл., с инер. силами;
- 2 – с учетом изл., без инер. сил;
- 3 – без учета изл., с инер. силами;
- 4 – без учета изл., без инер. сил.

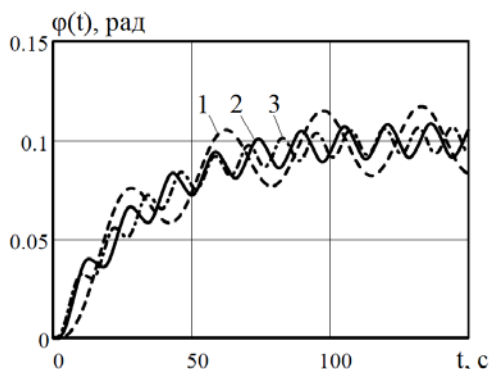


Рис.16. Зависимость φ от t .

- 1 – $\kappa_0 = 10$ Н·м; 2 – $\kappa_0 = 100$ Н·м;
- 3 – $\kappa_0 = 1000$ Н·м.

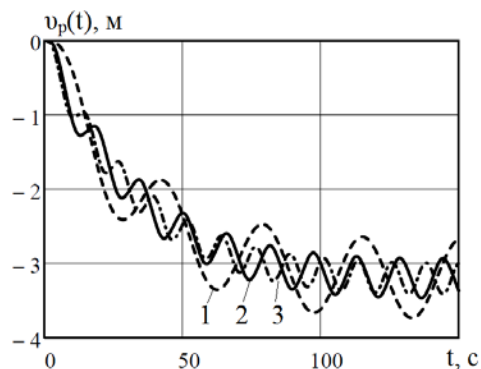


Рис.17. Зависимость v_p от t .

- 1 – $\kappa_0 = 10$ Н·м; 2 – $\kappa_0 = 100$ Н·м;
- 3 – $\kappa_0 = 1000$ Н·м.

На рис.16,17 приведены зависимости $\varphi(t)$, $v_p(t)$ для нескольких значений κ_0 . Следует отметить, что влияние жесткости упруго-вязкого шарнира на распределение температуры стержня незначительное.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Получено решение нестационарной задачи динамики КА с присоединенным к нему упругим тонкостенным стержнем, подвергающимся действию солнечных лучей с учетом теплоизлучения и изменения угла падения лучей за счет поворота КА и термоупругих колебаний стержня.
2. Выполнена оценка сходимости и устойчивости решения полученной системы нелинейных дифференциальных уравнений.
3. Выполнены расчеты свободных колебаний системы при выходе КА из тени при действии солнечных лучей при варьировании их углов падения.
4. Проведена оценка влияния инерционных сил стержня и учета теплоизлучения на характер движения рассматриваемой системы
5. Проведены исследования по влиянию параметров системы, в частности – упруго-вязкого шарнира, на характер колебаний стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Connel G.M., Chobotov V. *Possible Effects of Boom Flutter on the Attitude Dynamics of the OVI-10 Satellite* // Journal Spacecraft and Rockets. – 1969. – Vol.6. – №1. – Pp.90-92.
2. Yu Y.-Y. *Thermally induced vibration and flutter of a flexible boom* // Journal Spacecraft and Rockets. – 1969. – Vol.6. – №8. – Pp.902-910.
3. Graham J.D. *Solar induced bending vibrations of a flexible member* // AIAA Journal. – 1970. – Vol.8. – №11. – Pp.2031-2036.
4. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Связанная задача термоупругого изгиба и теплопроводности тонкостенного круглого стержня при солнечном нагреве* // Изв. РАН. МТТ. – 2000. – №6. – С.161-166.
5. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. *Нестационарные термоупругие колебания тонкостенного стержня, соединенного с космическим аппаратом, при солнечном нагреве* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №4. – С.459-468.
6. *Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике* – М.: Машиностроение, 1992. – 519 с.
7. Марченко В.М. *Температурные поля и напряжения в конструкциях летательных аппаратов*. – М.: Машиностроение, 1965. – 298 с.
8. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика упругих управляемых конструкций*. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 328 с.
9. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. *Термоупругие колебания длинного тонкостенного стержня, соединенного с космическим аппаратом, при солнечном нагреве с учетом теплоизлучения* / Всеросс. науч. конф. с междунар. участ. «Механика композиционных материалов и конструкций сложных и гетерогенных сред – 2015». Сборник материалов. – М.: ИПРИМ РАН, 2015. – С.84-87.

REFERENCES

1. Connel G.M., Chobotov V. *Possible Effects of Boom Flutter on the Attitude Dynamics of the OVI-10 Satellite*. Journal Spacecraft and Rockets, 1969, Vol.6, No.1, Pp.90-92.
2. Yu Y.-Y. *Thermally induced vibration and flutter of a flexible boom*. Journal Spacecraft and Rockets, 1969, Vol.6, No.8, Pp.902-910.
3. Graham J.D. *Solar induced bending vibrations of a flexible member*. AIAA Journal, 1970, Vol.8, No.11, Pp.2031-2036.
4. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Sviazannaia zadacha termouprugogo izgiba i teploprovodnosti tonkostennogo kruglogo sterzhnia pri solnechnom nagreve [The related problem of thermoelastic bending and thermal conductivity of a thin-walled circular rod with solar heating]*. Izvestia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2000, No.6, Pp.161-166.
5. Grishanina T.V., Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. *Nestatsionarnye termouprugie kolebaniia tonkostennogo sterzhnia, soedinennogo s kosmicheskim apparatom, pri solnechnom nagreve [Nonstationary thermoelastic vibrations of a thin-walled rod connected to a spacecraft with solar heating]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.4, Pp.459-468.
6. *Osnovy teploperedachi v aviatsionnoi i raketno-kosmicheskoi tekhnike [Fundamentals of heat transfer in aviation and rocket and space technology]*. Moskva: Mashinostroenie, 1992, 519 p.
7. Marchenko V.M. *Temperaturnye polia i napriazheniia v konstruksiiakh letatel'nykh apparatov [Temperature fields and stresses in aircraft structures]*. Moskva: Mashinostroenie, 1965, 298 p.
8. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Dinamika upravlyаемых konstruksii [Dynamics of elastic controlled structures]*. Moskva: Izdatel'stvo Moskovskogo aviatsionnogo instituta, 2007, 328 p.
9. Grishanina T.V., Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. *Termouprugie kolebaniia dlinnogo tonkostennogo sterzhnia, soedinennogo s kosmicheskim apparatom, pri solnechnom nagreve s uchetom teploizlucheniia [Thermoelastic vibrations of a long thin-walled rod connected to a spacecraft, with solar heating taking into account the heat emission]*. Vserossiiskaia nauchnaia konferentsiia s mezhdunarodnym uchastiem «Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii slozhnykh i geterogennykh sred – 2015», Sbornik materialov, Moskva: Institut prikladnoi mekhaniki Rossiiskoi akademii nauk, 2015, Pp.84-87.

Поступила в редакцию 14 марта 2017 года

Сведения об авторах:

Гришанина Татьяна Витальевна – д.ф.-м.н., проф., Кафедра «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: grishaninatat@list.ru
Русских Сергей Владимирович – к.ф.-м.н., доц., Кафедра «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: sergey.russkikh@rambler.ru

Шклярчук Федор Николаевич – д.т.н., проф., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: shklyarchuk@list.ru