

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ С АНИЗОТРОПИЕЙ ОБЩЕГО ВИДА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ТЕПЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ*

Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л., Селин И.А.

*ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет), г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Исследуется теплоперенос в композиционных теплозащитных материалах в условиях произвольного теплового нагружения на основе впервые полученного аналитического решения задачи анизотропной теплопроводности с анизотропией общего вида. Анализируется влияние на теплоперенос углов ориентации главных осей тензора теплопроводности, а также степени анизотропии – отношения максимального главного компонента тензора теплопроводности к минимальному. Показано, что с помощью изменения характеристик тензора теплопроводности можно канализировать тепловые потоки в анизотропной тепловой защите в нужном направлении и тем самым управлять величиной внешних тепловых потоков, например, от аэрогазодинамических течений.

Ключевые слова: теплозащитные композиционные материалы; главные оси и главные компоненты тензора теплопроводности; нестационарные температурные поля; наружные тепловые потоки; преобразования Фурье и Лапласа; степень анизотропии, ортотропные тела

HEAT TRANSFER ANALYTICAL INVESTIGATION IN HEAT PROTECTIVE COMPOSITES WITH GENERAL TYPE ANISOTROPY UNDER ARBITRARY HEAT LOADING

Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetcova E.L., Selin I.A.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

The heat transfer is investigating in the heat protective composites under conditions of the arbitrary heat loading. The investigation is based on the first obtained analytical solution of the anisotropic heat transfer problem with the general type anisotropy. The influence of angle orientation of the thermal conductivity tensor main axes as well as anisotropy power on the heat transfer is analyzing. It was shown that it is possible to canalize the heat flux in the anisotropic heat protection in the required direction with change of the thermal conductivity tensor characteristics. It gives a possibility to rule the amount of the external heat flux, for example, from aero-gas-dynamic flows.

Keywords: heat protective composites; main axes and main components of the thermal conductivity tensor; non-stationary temperature fields; external heat flux; Laplace and Fourier transform; anisotropy power, orthotropic bodies

* Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 15-01-04989 А и № 15-01-04996 А.

ВВЕДЕНИЕ

Большинство композиционных материалов, используемых в качестве теплозащитных в ракетно-космической технике, являются анизотропными. В них теплопроводность является не скалярной величиной, а тензором второго ранга, вследствие чего дифференциальное уравнение теплопроводности содержит смешанные производные температуры по пространственным переменным, а граничные условия в форме конвективного теплообмена содержат все компоненты градиента температур (а не только компонент в направлении нормали в случае изотропного тела).

Наличие смешанных производных приводит к значительным трудностям при решении задач анизотропной теплопроводности, поскольку известный в математической физике метод разделения переменных здесь не применим, так как смешанные производные не разделяются. Поэтому для аналитического решения задач анизотропной теплопроводности остаются методы интегральных преобразований.

Сложности аналитического решения задач для уравнений, содержащих смешанные производные, определяют незначительное число работ по теплопроводности анизотропных тел на фоне сотен и тысяч публикаций по теплопроводности изотропных тел, наиболее важными среди которых являются монографии и учебники Лыкова А.В. [1], Карташова Э.М. [2], Зарубина В.С. [3], Каслоу Д. и Егера Д. [4]. По теплопроводности анизотропных тел, кроме работ авторов [5-8] и появившихся в последнее время работ Аттеткова А.В. и Волкова И.К. [9,10] известны более ранние работы американских авторов [11,12].

Вместе с тем потребности в решении задач теплопроводности в теплозащитных анизотропных материалах огромна, в связи с созданием в последнее время новых композиционных материалов, которые все являются анизотропными. В этой связи тематика статьи актуальна особенно в ракетно-космической отрасли при проектировании гиперзвуковых летательных аппаратов.

В данной работе поставлена и аналитически решена задача теплопереноса в анизотропной пластине с анизотропией общего вида, когда на границах пластины действуют произвольные тепловые потоки, например, на одной из границ тепловые потоки возникают от вязкого газодинамического течения, а на другой – теплообмен внутри отсека летательного аппарата. Получено аналитическое решение с использованием методов интегральных преобразований Фурье по продольной переменной и Лапласа – по времени, а также анализируются многочисленные результаты.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На границах $y=0$ и $y=\delta$ анизотропной пластины (рис.1) действуют произвольные (не симметричные относительно оси Oy) тепловые потоки $q_1(x)$ и $q_2(x)$ соответственно, где $q_1(x)$, $q_2(x)$ – выпуклые функции. При таких воздействиях на анизотропное тело формулируется следующая задача анизотропной теплопроводности:

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

$$-\infty < x < \infty, \quad y \in (0; \delta), \quad t > 0;$$

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = q_1(x) \cdot \eta(l_1 - |x|), \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (2)$$

$$\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=\delta} = q_2(x) \cdot \eta(l_2 - |x|), \quad -\infty < x < \infty, \quad y = \delta, \quad t > 0; \quad (3)$$

$$\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad 0 \leq y \leq \delta, \quad t > 0; \quad (4)$$

$$T(x, y, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq y \leq \delta, \quad t = 0, \quad (5)$$

где $\eta(\psi)$ – единичная функция ($\eta(\psi) = 1$ при $\psi > 0$ и $\eta(\psi) = 0$ при $\psi < 0$).

Компоненты тензора теплопроводности определяются соотношениями [5]

$$\lambda_{11} = \lambda_\xi \cos^2 \varphi + \lambda_\eta \sin^2 \varphi,$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = (\lambda_\xi - \lambda_\eta) \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\lambda_{22} = \lambda_\xi \sin^2 \varphi + \lambda_\eta \cos^2 \varphi.$$

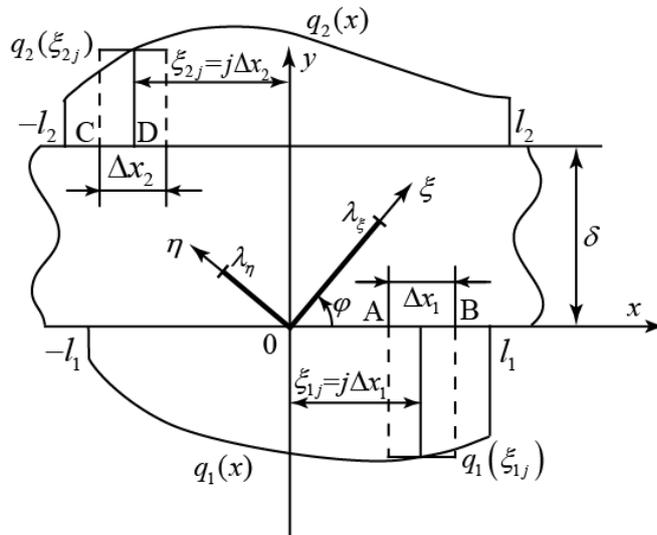


Рис.1. Расчетная схема для задачи теплопереноса в анизотропной пластине при произвольном тепловом нагружении.

В соотношениях (1)-(5) введены следующие обозначения: Ox, Oy – декартовы оси координат; $O\xi, O\eta$ – главные оси тензора теплопроводности; $\lambda_\xi, \lambda_\eta$ – главные компоненты тензора теплопроводности; t – время; $T(x, y, t)$ – температура; c, ρ – теплоемкость и плотность соответственно; φ – угол, ориентирующий главные оси $O\xi, O\eta$ относительно осей Ox, Oy декартовой системы координат; δ – толщина пластины.

В случае если начальное условие (5) отлично от нуля и равно некоторому постоянному значению T_0 , то ниже полученное аналитическое решение

увеличивается на эту величину.

Символы $\pm\infty$ означают некоторое конечное значение переменной x , для которой отклонение температуры $T(x, y, t)$ от начального значения не превышает более чем 1%.

Требуется определить распределение температур $T(x, y, t)$ в пластине, включая и границы $y = 0$ и $y = \delta$.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение задачи (1)-(5) основано на методе построения граничной функции влияния (функции источника), а поскольку задача (1)-(5) содержит смешанные дифференциальные операторы, то для ее определения используются интегральные преобразования Фурье по переменной

$$T_{\omega}(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x, y, t) \exp(-i\omega x) dx$$

и Лапласа по переменной t

$$T_{\omega, p}(y) = \int_0^{\infty} T_{\omega}(y, t) \exp(-pt) dt.$$

Однако, поскольку функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ – произвольные, и соответствующие интегралы от них сложно вычислить, то отрезки $[-l_1, l_1]$ и $[-l_2, l_2]$ разбиваются на $2J_1$ и $2J_2$ отрезков Δx_1 и Δx_2 , соответственно, центры которых отстают от начала координат на расстояния $\xi_{1j} = j_1 \Delta x_1$, $j_1 = \overline{-J_1, J_1}$ и $\xi_{2j} = j_2 \Delta x_2$, $j_2 = \overline{-J_2, J_2}$. Без потери общности будем полагать, что $J_1 = J_2 = J$, а $\Delta x_1 = l_1 / J$, $\Delta x_2 = l_2 / J$. На каждом из отрезков $[\xi_{1j} - \Delta x_1 / 2; \xi_{1j} + \Delta x_1 / 2]$ и $[\xi_{2j} - \Delta x_2 / 2; \xi_{2j} + \Delta x_2 / 2]$ значения тепловых потоков $q_1(\xi_{1j})$, $q_2(\xi_{2j})$ постоянны.

Покажем, что можно построить граничную функцию влияния $G(x, \xi, y, t)$ точечного источника теплоты $q(\xi)$ единичной мощности, помещенного в точку ξ на границе замкнутой области, с помощью которой решением задачи (1)-(5) будет интеграл

$$T(x, y, t) = \oint_C G(x, \xi, y, t) q(\xi) d\xi.$$

Пусть функции $q_1(x)\eta(l_1 - |x|)$ при $y = 0$ и $x \in (-\infty; \infty)$ и $q_2(x)\eta(l_2 - |x|)$ при $y = \delta$ и $x \in (-\infty; \infty)$ кусочно-непрерывны и имеют конечное число точек разрыва первого рода, и пусть при $x \rightarrow \pm\infty$ $q(\pm\infty) = 0$. Тогда можно построить граничную функцию влияния $G(x, \xi, y, t)$ точечного источника теплоты $q(\xi)$ единичной мощности, помещенную в точку ξ на границе замкнутой области, с помощью которой решением задачи (1)-(5) будет интеграл

$$T(x, y, t) = \oint_C G(x, \xi, y, t) q(\xi) d\xi,$$

где C – замкнутый контур, ограничивающий расчетную область.

Действительно, рассмотрим на промежутке $x \in [\xi_j - \Delta x / 2; \xi_j + \Delta x / 2]$ импульсную функцию $\delta_{\Delta x} = 1 / \Delta x$, интеграл от которой на отрезке Δx равен единице $\int_0^{\Delta x} \frac{1}{\Delta x} dx = 1$. Импульсную функцию в окрестности точки ξ_j можно

записать с помощью функции Хэвисайда

$$\delta_{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[\eta \left(x - \left(\xi_j - \Delta x / 2 \right) \right) - \eta \left(x - \left(\xi_j + \Delta x / 2 \right) \right) \right],$$

устремляя в которой $\Delta x \rightarrow 0$, получим δ – функцию Дирака

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \delta_{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\eta \left(x - \left(\xi_j - \Delta x / 2 \right) \right) - \eta \left(x - \left(\xi_j + \Delta x / 2 \right) \right) \right] = \\ &= \eta' \left(x - \xi_j \right) = \delta \left(x - \xi_j \right). \end{aligned}$$

Поэтому в задаче (1)-(5) вместо граничных условий (2), (3) будем *вначале* использовать граничные условия в виде

$$-\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q_1 \left(\xi_{1j} \right) \delta \left(x - \xi_{1j} \right), \quad x \in (-\infty; \infty), \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (6)$$

$$\left(\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q_2 \left(\xi_{2j} \right) \delta \left(x - \xi_{2j} \right), \quad x \in (-\infty; \infty), \quad y = \delta, \quad t > 0, \quad (7)$$

где $\delta(x - \xi)$ – дельта-функция.

Рассмотрим расчетную область, ограниченную *замкнутой границей* $y = 0$, $y = \delta$ и $x = -a$ и $x = a$, где a – достаточно большое число, для которого тепловые потоки $q(y) = 0$ при $x = -a$ и $q(y) = 0$ при $x = a$. На этой замкнутой границе функция $q(x, y)$ – непрерывна, так как вне носителей $|x| < -l_1$, $|x| < l_2$ тепловые потоки в соответствии с условиями (2), (3) равны нулю. Следовательно, криволинейный интеграл по замкнутому контуру существует.

Пусть решением задачи (1), (4)-(7) для импульсной функции $q(\xi_j) \delta(x - \xi_j)$ будет функция $G(x, \xi_j, y, t)$, которая называется граничной функцией влияния (граничной функцией Грина). Для импульсной функции $q(\xi_j) \Delta \xi$ ($\Delta \xi \equiv \Delta x$) решением будет функция $G(x, \xi_j, y, t) q(\xi_j) \Delta \xi$ и в соответствии с принципом суперпозиции приближенным решением задачи (1)-(5) будет сумма

$$\bar{T}(x, y, t) \approx \sum_{j=-J}^J G(x, \xi_j, y, t) q(\xi_j) \Delta \xi. \quad (8)$$

Пределом интегральных сумм (8) при $J \rightarrow \infty$ ($\Delta \xi \rightarrow 0$) будет интеграл

$$T(x, y, t) = \oint_C G(x, \xi, y, t) q(\xi) d\xi, \quad (9)$$

где C – замкнутый контур, включающий левую и правую бесконечные границы, а поскольку там тепловые потоки равны нулю, то

$$T(x, y, t) = \int_{-l_1}^{l_1} G(x, \xi, y, t) q_1(\xi) d\xi + \int_{-l_2}^{l_2} G(x, \xi, y, t) q_2(\xi) d\xi. \quad (10)$$

Поскольку функция $G(x, \xi, y, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), то она непрерывна во всей расчетной области, в том числе и на границе области. Кроме этого, $q(\xi)$ кусочно-непрерывна на замкнутой границе S , а следовательно произведение $G(x, \xi, y, t) \cdot q(\xi)$ также кусочно-непрерывна на границе S , вследствие чего интегралы (9) и (10) существуют.

Так как функции $q_1(\xi)$ $q_2(\xi)$ ограничены на носителях $[-l_1; l_1]$ и $[-l_2; l_2]$ соответственно, то они абсолютно интегрируемы, и к ним можно применить интегральные преобразования Фурье и Лапласа. Следовательно, функция источника $G(x, \xi, y, t)$ существует.

К функциям $q_1(\xi)$ и $q_2(\xi)$ можно применить интегральные преобразования Фурье и Лапласа.

Действительно, достаточным условием существования интегрального преобразования Фурье является условие абсолютной интегрируемости функций $q_1(\xi)$ и $q_2(\xi)$ на промежутке $\xi \in (-\infty; \infty)$, то есть существование интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q_1(\xi)| d\xi < M_1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |q_2(\xi)| d\xi < M_2.$$

Поскольку функции $q_1(\xi)$ и $q_2(\xi)$ на носителях $\xi \in (-l_1; l_1)$ и $\xi \in (-l_2; l_2)$ соответственно непрерывны и ограничены, то указанные интегралы существуют.

По той же причине функции $q_1(\xi)$ и $q_2(\xi)$ являются оригиналами, для которых существуют преобразования Лапласа.

Для нахождения функции источника $G(x, \xi, y, t)$ применим теперь к задаче (1), (4)-(7) преобразования Фурье и Лапласа, получим следующую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно трансформанты $T_{\omega, p}(y)$

$$\lambda_{22} \frac{d^2 T_{\omega, p}}{dy^2} + 2i\lambda_{12}\omega \frac{dT_{\omega, p}}{dy} - [\lambda_{11}\omega^2 + c\rho \cdot p] T_{\omega, p} = 0, \quad 0 < y < \delta; \quad (11)$$

$$\left[\lambda_{22} \frac{dT_{\omega, p}}{dy} + i\lambda_{21} \cdot \omega T_{\omega, p} \right]_{y=0} = -\frac{q_1(\xi_{1j})}{p} \exp(-i\omega\xi_{1j}), \quad y=0; \quad (12)$$

$$\left[\lambda_{22} \frac{dT_{\omega, p}}{dy} + i\lambda_{21} \cdot \omega T_{\omega, p} \right]_{y=\delta} = \frac{q_2(\xi_{2j})}{p} \exp(-i\omega\xi_{2j}), \quad y=\delta, \quad (13)$$

где $i = \sqrt{-1}$, $j = \overline{-J, J}$.

Решением задачи (11)-(13) будет функция

$$T_{\omega,p}(y) = \frac{\exp(-i\omega\alpha y)}{p \cdot \lambda_{22}} \left[\frac{q_2(\xi_{2j}) \exp(-i\omega\xi_{2j})}{\exp(-i\omega\alpha\delta)} \times \right. \\ \times \frac{\exp(y \cdot K_{\omega,p}) + \exp(-y \cdot K_{\omega,p})}{K_{\omega,p} (\exp(\delta \cdot K_{\omega,p}) - \exp(-\delta \cdot K_{\omega,p}))} + q_1(\xi_{1j}) \exp(-i\omega\xi_{1j}) \times \\ \left. \times \frac{\exp((\delta - y) K_{\omega,p}) + \exp(-(\delta - y) K_{\omega,p})}{K_{\omega,p} (\exp(\delta \cdot K_{\omega,p}) - \exp(-\delta \cdot K_{\omega,p}))} \right], \quad (14)$$

где

$$K_{\omega,p} = \sqrt{\beta\omega^2 + \gamma p}; \quad \alpha = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}}; \quad \beta = \frac{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}{\lambda_{22}^2} = \frac{\lambda_\xi \lambda_\eta}{\lambda_{22}^2}; \quad \gamma = \frac{c\rho}{\lambda_{22}}.$$

Для обращения по Лапласу изображения (14) рассмотрим вначале обращение функций

$$F(p, y) = \frac{1}{p} \frac{\exp(y \cdot K_{\omega,p}) + \exp(-y \cdot K_{\omega,p})}{K_{\omega,p} [\exp(\delta \cdot K_{\omega,p}) - \exp(-\delta \cdot K_{\omega,p})]}, \quad (15)$$

$$F(p, \delta - y) = \frac{1}{p} \frac{\exp((\delta - y) \cdot K_{\omega,p}) + \exp(-(\delta - y) \cdot K_{\omega,p})}{K_{\omega,p} [\exp(\delta \cdot K_{\omega,p}) - \exp(-\delta \cdot K_{\omega,p})]}, \quad (16)$$

входящих в выражение (14).

Оригиналами для изображений (15), (16) являются функции [5]

$$\frac{1}{p} \cdot F(p, Y) \div 1(t) * f(t, Y) = \int_0^t 1(\tau) \left\{ \frac{1}{\gamma\delta} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\gamma\delta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi Y}{\delta}\right) \exp\left[-\left(\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2} + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)(t-\tau)\right] \right\} d\tau, \quad (17)$$

где

$Y = y$ для $f(t, y)$ и $Y = \delta - y$ для $f(t, \delta - y)$.

С использованием оригиналов по Лапласу (17) осталось найти обратное преобразование Фурье от выражения (14)

$$T(x, \xi_{1j}, \xi_{2j}, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) \frac{\exp(-i\omega\alpha y)}{\lambda_{22}} \frac{q_2(\xi_{2j}) \exp(-i\omega\xi_{2j})}{\exp(-i\omega\alpha\delta)} \times \\ \times \left(\int_0^t 1(\tau) \left\{ \frac{1}{\gamma\delta} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}(t-\tau)\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{\gamma\delta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi y}{\delta}\right) \exp\left[-\left(\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2} + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)(t-\tau)\right] \right\} d\tau \right) d\omega + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) \cdot \frac{\exp(-i\omega\alpha y)}{\lambda_{22}} q_1(\xi_{1j}) \exp(-i\omega\xi_{1j}) \times \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\int_0^t 1(\tau) \left\{ \frac{1}{\gamma\delta} \exp\left(-\frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)(t-\tau) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{\gamma\delta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(k\pi \frac{\delta-y}{\delta}\right) \exp\left[-\left(\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2} + \frac{\beta\omega^2}{\gamma}\right)(t-\tau)\right] \right\} d\tau \right) d\omega. \end{aligned}$$

Вычисляя в (18) интегралы по переменной ω , находим распределение температур в анизотропной полосе с тепловыми потоками на границах в виде импульсных функций $q(\xi)\delta(x-\xi)$

$$\begin{aligned} T(x, \xi_{1j}, \xi_{2j}, y, t) \equiv G(x, \xi_{1j}, \xi_{2j}, t) &= \frac{q_1(\xi_{1j})}{2\gamma\delta\lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t 1(\tau) \times \\ & \times \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(k\pi \frac{\delta-y}{\delta}\right) \cdot \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right) \right] \times \\ & \times \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi_{1j} + (\alpha y - x))^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \right) d\tau + \\ & + \frac{q_2(\xi_{2j})}{2\gamma\delta \cdot \lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t 1(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\frac{k\pi y}{\delta} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right) \right] \times \\ & \times \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi_{2j} - \alpha(\delta-y) - x)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \right) d\tau, \quad j = -\overline{J}, J, \end{aligned} \tag{19}$$

Применяя к выражению (19) принцип суперпозиции с импульсными функциями $q(\xi)\Delta\xi$, получим

$$\begin{aligned} \bar{T}(x, y, t) &= \sum_{j=-J}^J \left\{ \frac{q_2(\xi_{2j})}{2\gamma\delta \cdot \lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t 1(\tau) \Phi(y, t, \tau) \times \right. \\ & \times \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi_{2j} - \alpha(\delta-y) - x)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \right) d\tau + \frac{q_1(\xi_{1j})}{2\gamma\delta\lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t 1(\tau) \cdot \Phi(\delta-y, t, \tau) \times \\ & \times \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi_{1j} + (\alpha y - x))^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) \right) d\tau \left. \right\} \Delta\xi, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\Phi(Y, t, \tau) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(k\pi \frac{Y}{\delta}\right) \cdot \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2}(t-\tau)\right), \quad Y = \{y; \delta-y\}.$$

Окончательно, в соответствии с выражением (10), получаем

$$\begin{aligned}
 T(x, y, t) = & \frac{1}{2\gamma\delta\lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t \left\{ 1(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{k\pi y}{\delta} \exp \left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2} (t-\tau) \right) \right] \right\} \times \\
 & \times \int_{-l_2}^{l_2} \left\{ \frac{q_2(\xi)}{\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \exp \left(-\frac{(\xi - \alpha(\delta - y) - x)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma} \right) \right\} d\xi d\tau + \\
 & + \frac{1}{2\gamma\delta\lambda_{22}\sqrt{\pi}} \int_0^t \left\{ 1(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos k\pi \frac{\delta - y}{\delta} \exp \left(-\frac{k^2\pi^2}{\gamma\delta^2} (t-\tau) \right) \right] \right\} \times \\
 & \times \int_{-l_1}^{l_1} \left\{ \frac{q_1(\xi)}{\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}(t-\tau)}} \exp \left(-\frac{(\xi + \alpha y - x)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma} \right) \right\} d\xi d\tau. \tag{21}
 \end{aligned}$$

Функция (21) – точное решение задачи (1)-(5) о теплопереносе в анизотропной пластине при произвольном нагружении ее тепловыми потоками на границах $y=0$ и $y=\delta$.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Решение (21) в двумерном случае выведено для анизотропии общего вида, однако его можно использовать для расчетов в ортотропном случае, когда угол φ ориентации главных осей тензора теплопроводности равен нулю или значению $\pi/2$, а также в изотропном случае при $\lambda_{\xi} = \lambda_{\eta}$.

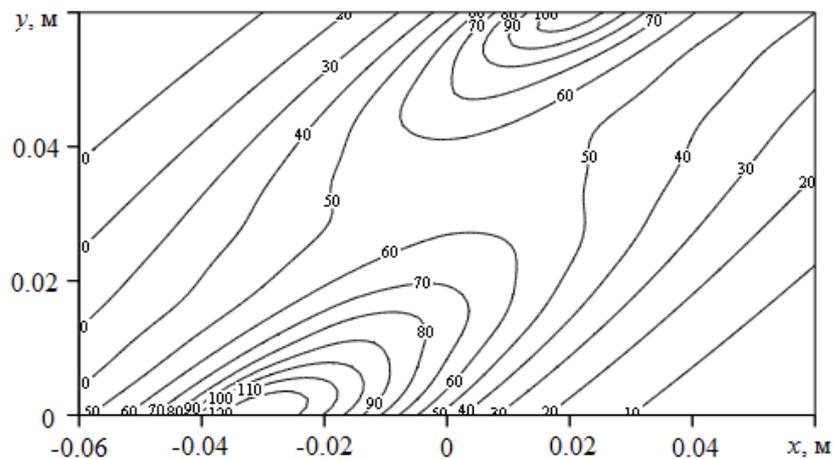
Отношение максимального главного коэффициента к минимальному (степень анизотропии) изменяется для многих материалов от единицы (изотропные материалы) до нескольких сотен. Например, в [14] приведены теплофизические характеристики графитов и графитосодержащих материалов со степенью анизотропии от нескольких единиц до двухсот.

По формуле (21) проведены многочисленные расчеты нестационарных температурных полей в анизотропных пластинах и некоторые из них приведены на рис.2-4. Для расчетов принимались следующие исходные данные: $c\rho = 1,5 \cdot 10^6$ Дж/(м³·К), $\delta = 0,06$ м; предельное время $t = 400$ с; $q_1(x) = 10^6 x$, для $y = \delta, x \in [-0,04; 0]$; $q_2(x) = 3 \cdot 10^4 \cdot \exp[-3,6(x/0,02 - 1)^2]$ для $y = 0, x \in [0; 0,04]$; $T(x, y, 0) = 0$.

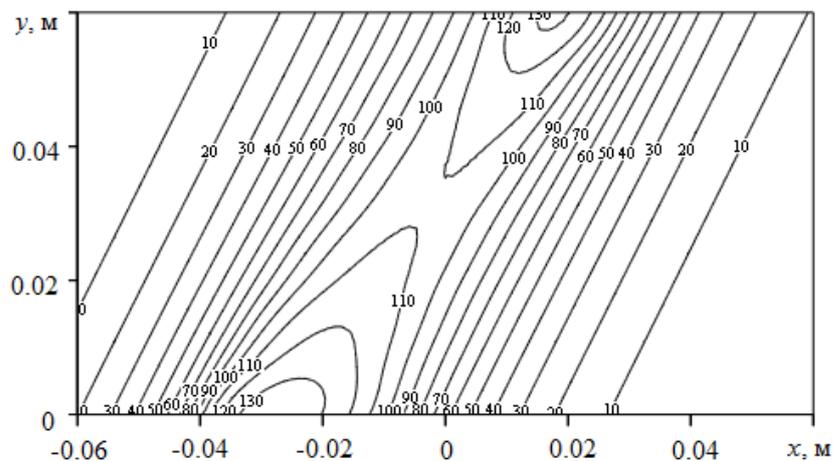
На рис.2 приведены температурные поля в анизотропной пластине в момент времени 400 с, где компоненты тензора теплопроводности принимали значения $\lambda_{\xi} = 20$ Вт/(м·К) $\lambda_{\eta} = 1$ Вт/(м·К) для случаев $\varphi = \pi/6$ (рис.2а) и $\varphi = \pi/3$ (рис.2б).

Из рисунка видно, что изотермы ориентированы в направлении главной оси тензора теплопроводности с большим значением главного коэффициента

(в данном случае в направлении главной оси $O\xi$). Возникающая при этом седловая точка является точкой пересечения осей симметрии изотерм, параллельных главным осям. Через эту точку должна проходить изотерма, разделяющая области прогрева под действием тепловых потоков на различных границах (так называемая сепаратриса). При этом границы прогреваются значительно дальше зоны действия ненулевых тепловых потоков.



а)

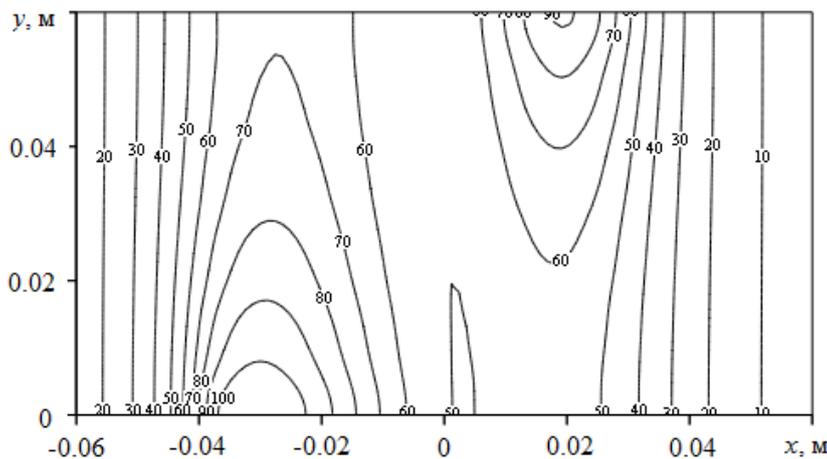


б)

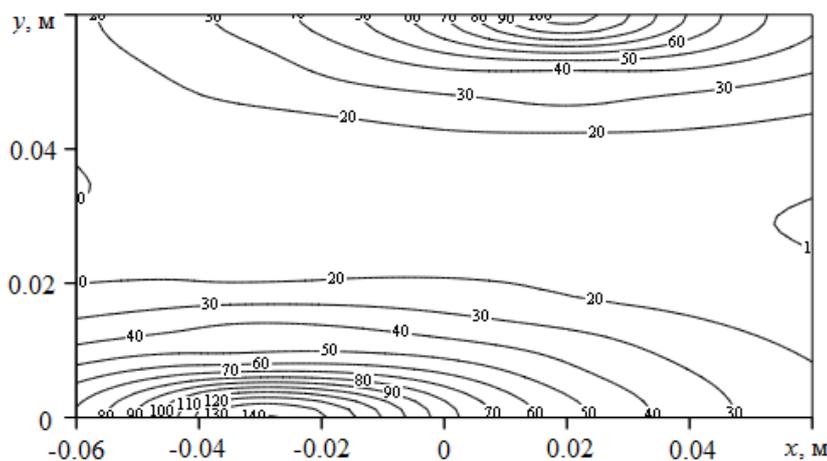
Рис.2. Температурные поля в анизотропной пластине для случая $\lambda_\xi = 20 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$, $\lambda_\eta = 1 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$: а) $\varphi = \pi / 6$; б) $\varphi = \pi / 3$.

На рис.3 приведены температурные поля в ортотропной пластине для случаев $\varphi = 0 (O\xi \equiv Ox, O\eta \equiv Oy)$ (рис.3а) и $\varphi = \pi / 2$ (рис.3б). Главные компоненты тензора теплопроводности приняты теми же, что и для рис.2: $\lambda_\xi = 20 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$, $\lambda_\eta = 1 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$. В случае $\varphi = 0$ (рис.3а) продольный коэффициент λ_ξ теплопроводности в 20 раз выше поперечного $\lambda_\eta = 1 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$, что определяет значительный отток теплоты в продольном направлении, причем возникает разделительная кривая (сепаратриса), разделяющая влияние ненулевых

тепловых потоков на границах $y=0$ и $y=\delta$. В случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (рис.3б) изотермы локализируются в окрестности границ $y=0$ и $y=\delta$, что можно использовать для охлаждения центральной части пластины, где в продольном направлении должна проходить сепаратриса с начальным значением температуры. Поскольку на границах заданы тепловые потоки на ограниченных отрезках, то обе границы $y=0$ и $y=\delta$ прогреваются значительно дальше зоны действия ненулевых тепловых потоков.



а)



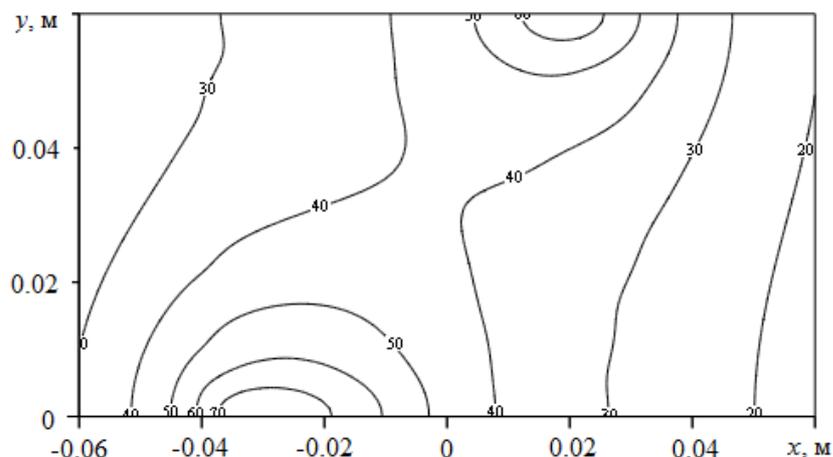
б)

Рис.3. Температурные поля в ортотропной пластине для случая $\lambda_{\xi} = 20$ Вт / (м·К), $\lambda_{\eta} = 1$ Вт / (м·К): а) $\varphi = 0$; б) $\varphi = \pi / 2$.

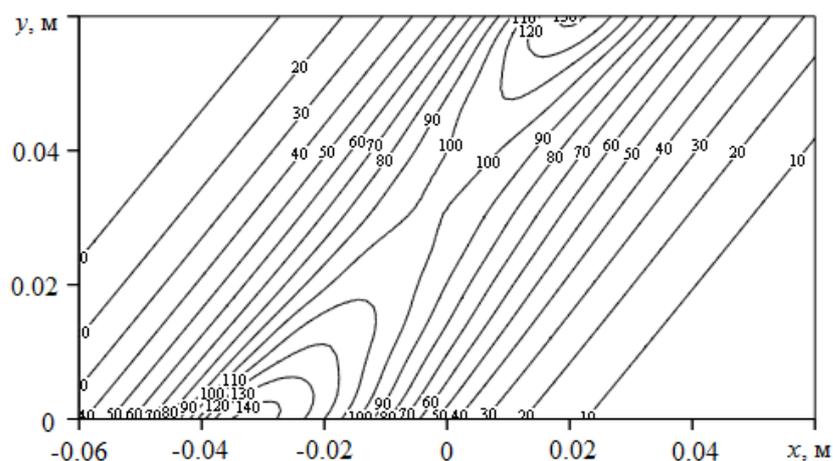
На рис.4 приведены температурные поля для анизотропной пластины с $\lambda_{\xi} = 20$ Вт / (м·К), $\lambda_{\eta} = 1$ Вт / (м·К) и $\varphi = \pi / 4$ (рис.4а) и изотропной пластины при $\lambda_{\xi} = \lambda_{\eta} = 10$ Вт / (м·К) и $\varphi = 0$ (рис.4б). В первом случае седловая точка находится на сепаратрисе, параллельной оси $O\xi$, т.е. под углом к оси Ox , равным $\pi / 4$ (точнее, в точке пересечения линий, параллельных осям $O\xi$ и $O\eta$).

В изотропном случае изотермы симметричны относительно сепаратрисы, проходящей через точки на границах $y=0$ и $y=\delta$ со среднеинтегральными

значениями тепловых потоков, а седловая точка находится на этой сепаратрисе. Вдоль оси Ox происходит равномерный прогрев как внутри пластины, так и на ее границах.



а)



б)

Рис.4. Температурные поля в анизотропной пластине при $\lambda_x = 20$ Вт/(м·К), $\lambda_y = 1$ Вт/(м·К) $\varphi = \pi/4$ (а) и изотропной пластине при $\lambda_x = \lambda_y = 10$ Вт/(м·К) $\varphi = 0$ (б).

ВЫВОДЫ

Впервые в явном виде получено аналитическое решение нестационарной задачи теории теплопроводности в анизотропной полосе при задании произвольных тепловых потоков на границах пластины (граничные условия второго рода) на основе построения граничной функции влияния (функции Грина), определяемой с помощью интегральных преобразований Фурье и Лапласа, поскольку задача содержит смешанные дифференциальные операторы.

Для различных значений компонентов и углов ориентации главных осей тензора теплопроводности получены температурные поля в плоском анизотропном теле, являющимся тепловой защитой скоростных летательных

аппаратов, изготовленной из композиционных материалов.

Установлено, что изотермы ориентированы в направлении главной оси тензора теплопроводности с большим коэффициентом теплопроводности. При этом границы пластины нагреваются не только в зоне действия тепловых потоков, но и вне носителей, на которых заданы тепловые потоки.

Установлено также наличие седловых точек, через которые проходят изотермы (сепаратрисы), разделяющие температурные поля от тепловых потоков на разных границах пластины.

СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

T – температура, K ; λ_{11} , $\lambda_{12} = \lambda_{21}$, λ_{22} – компоненты тензора теплопроводности в уравнениях (1)-(5), $Вт / (м \cdot K)$; t – время, $с$; q – плотность теплового потока, $Вт / (м \cdot K)$; Ox , Oy – оси декартовой системы координат; $O\xi$, $O\eta$ – оси главной системы координат; δ – толщина пластины, $м$; $c\rho$ – объемная теплоемкость в уравнении (1), $Вт / (м \cdot K)$ φ – угол ориентации главных осей тензора теплопроводности относительно декартовой системы координат, $рад$; $\eta(\psi)$ – единичная функция, $\eta(\psi) = 1$ для $\psi > 0$, $\eta(\psi) = 0$ для $\psi < 0$; l_1 , l_2 – области действия ненулевых тепловых потоков на границе $y = 0$ и $y = \delta$ соответственно; p – параметр преобразования Лапласа; ω – параметр преобразования Фурье; $T_{\omega, p}(y)$ – трансформанта преобразований Фурье и Лапласа в (12); $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi$ – интеграл ошибок.

Индексы: 1 – граница $y = 0$; 2 – граница $y = \delta$; ξ – главная ось $O\xi$; η – главная ось $O\eta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. Карташов Э.М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*. – М.: Высшая школа, 2001. – 552 с.
3. Зарубин В.С. *Инженерные методы решения задач теплопроводности*. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 328 с.
4. Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
5. Формалев В.Ф. *Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач*. – М.: Физматлит, 2014. – 310 с.
6. Формалев В.Ф. *Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи*. – М.: Физматлит, 2015. – 276 с.
7. Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л. *Тепломассоперенос в анизотропных телах при аэрогазодинамическом нагреве*. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. – 308 с.
8. Формалев В.Ф. *Тепломассоперенос в анизотропных телах. Обзор // Теплофизика высоких температур*. – 2001. – Т.39. – №5. – С.810-832.
9. Аттетков А.В., Волков И.К. *Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого находится под воздействием внешнего теплового потока // Тепловые процессы в технике*. – 2015. – Т.7. – №2. – С.73-79.

10. Аттетков А.В., Волков И.К. *Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого содержит пленочное покрытие* // Известия РАН. Энергетика. – 2015. – №3. – С.39-49.
11. Чжан Ю.П., Цзоу Р.Ц. *Теплопроводность в анизотропной среде, однородной в цилиндрических областях* // Теплопередача. – 1977. – №1. – С.42-51.
12. Чжан Ю.П., Пунь К.Ц. *Трехмерная установившаяся теплопроводность в цилиндрах из материала с анизотропией свойств общего вида* // Теплопередача. – 1979. – №3. – С.203-210.
13. Дёч Г. *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа.* – М.: Наука, 1965. – 288 с.
14. Ho C.Y., Powell R.W., Liley P.E. *Thermal Conductivity of Selected Materials. Part 2.* – Washington: US Government Printing Office, 1968. – Pp.129-133.

REFERENCES

1. Lykov A.V. *Teoriia teploprovodnosti [The theory of heat conduction]*. Moskva, Vysshaia shkola, 1967, 600 p.
2. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel [Analytical methods in the theory of heat conduction of solid bodies]*. Moskva, Vysshaia shkola, 2001, 552 p.
3. Zarubin V.S. *Inzhenernye metody resheniia zadach teploprovodnosti [Engineering methods for solving problems of heat conduction]*. Moskva, Energoatomizdat, 1983, 328 p.
4. Karlsru G., Eger D. *Teploprovodnost' tverdykh tel [The thermal conductivity of solids]*. Moskva, Nauka, 1964, 487 p.
5. Formalev V.F. *Teploprovodnost' anizotropnykh tel. Analiticheskie metody resheniia zadach [The thermal conductivity of anisotropic bodies. Analytical methods for solving problems]*. Moskva, Fizmatlit, 2014, 310 p.
6. Formalev V.F. *Teploperenos v anizotropnykh tverdykh telakh. Chislennye metody, teplovye volny, obratnye zadachi [Heat transfer in anisotropic solids. Numerical methods, heat waves, inverse problems]*. Moskva, Fizmatlit, 2015, 276 p.
7. Formalev V.F., Kuznetsova E.L. *Teplomassoperenos v anizotropnykh telakh pri aerogazodinamicheskom nagreve [Heat and mass transfer in anisotropic bodies with aerogazodinamicheskom heating]*. Moskva, Izd-vo MAI-PRINT, 2010, 308 p.
8. Formalev V.F. *Teplomassoperenos v anizotropnykh telakh. Obzor [Heat and mass transfer in anisotropic bodies. Review]*. Teplofizika vysokikh temperatur, 2001, Vol.39, No.5, Pp.810-832.
9. Attetkov A.V., Volkov I.K. *Temperaturnoe pole anizotropnogo poluprostranstva, podvizhnaia granitsa kotorogo nakhoditsia pod vozdeistviem vneshnego teplovogo potoka [Temperature field of an anisotropic half-space, the movable boundary of which is under the influence of external heat flux]*. Teplovye protsessy v tekhnike, 2015, Vol.7, No.2, Pp.73-79.
10. Attetkov A.V., Volkov I.K. *Temperaturnoe pole anizotropnogo poluprostranstva, podvizhnaia granitsa kotorogo sodержit plenochnoe pokrytie [Temperature field of an anisotropic half-space, the movable boundary of which contains a film coating]*. Izvestiia RAN. Energetika, 2015, No.3, Pp.39-49.
11. Zhan Y.P., Tsou R.C. *Teploprovodnost' v anizotropnoi srede, odnorodnoi v tsilindricheskikh oblastiakh [Thermal conduction in an anisotropic medium, homogeneous in cylindrical domains]*. Teploperedacha, 1977, No.1, Pp.42-51.

12. Zhan Y.P., Pun K.C. *Ttrekhmernaiia ustanovivshaiasia teploprovodnost' v tsilindrakh iz materiala s anizotropiei svoistv obshchego vida [Three-dimensional steady-state thermal conductivity of the material in the cylinders with the anisotropy of the general form properties]*. Teploperedacha, 1979, No.3, Pp.203-210.
13. Dech G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniiu preobrazovaniia Laplasa [Guide to the practical application of the laplace transform]*. Moskva, Nauka, 1965, 288 p.
14. Ho C.Y., Powell R.W., Liley P.E. *Thermal Conductivity of Selected Matherials. Part 2*. Washington: US Government Printing Office, 1968, Pp.129-133.

Поступила в редакцию 13 января 2017 года

Сведения об авторах:

Формалев Владимир Федорович – д.ф.-м.н., проф., Кафедра «Вычислительная математика и программирование», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: formalev38@mail.ru

Колесник Сергей Александрович – к.ф.-м.н., доц., Кафедра «Вычислительная математика и программирование» ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: sergey@oviont.com

Кузнецова Екатерина Львовна – д.ф.-м.н., в.н.с., Факультет «Прикладная механика», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: lareyna@mail.ru

Селин Илья Александрович – к.ф.-м.н., с.н.с., Факультет «Прикладная механика» ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: I.Selin@bk.ru