

УДК 532.135:536.242:678:065

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ НА ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Баранов А.В., Юницкий С.А.

*Российский Государственный Университет нефти и газа
(национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина,
г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Представлена математическая модель неизотермического течения неньтоновской жидкости в плоском канале. Отмечены все важные факторы, которые необходимо учитывать при разработке модели. Многие допущения были сделаны на основании того, что течение осуществляется при низких значениях критерия Рейнольдса и высоком значении критерия Пекле. Это позволяет пренебречь в уравнении движения инерционными членами и в уравнении энергии осевой теплопроводностью. В качестве реологической модели используется модель Фан-Тьен-Таннера. В связи с этим приведен обзор работ, появившихся за последние годы и посвященных исследованиям течения жидкостей с данной реологической моделью в каналах. Учитываются тепловые граничные условия первого рода и диссипация энергии. Температурная зависимость вязкости не учитывается. Температура среды на входе в канал и температура стенок канала не совпадают. Это означает, что композиция по мере течения в канале будет прогреваться как от горячих стенок канала, так и за счет диссипации энергии. Из уравнения движения с использованием данной реологической модели профиль скорости получается выраженным в явном виде. Решение уравнения энергии при нахождении температурных профилей проводилось численным методом конечных разностей. Приведены результаты расчетов. Показано значительное влияние чисел Вайсенберга и Бринкмана на профиль температуры и распределение числа Нуссельта вдоль канала. Отмечено также, что учет вязкоупругости при значительных значениях числа Вайсенберга ведет к снижению диссипативного разогрева среды. Это отражается и на профилях температуры и на локальной теплоотдаче на стенке канала. Из приведенных расчетов видно, что влияние высокоэластических свойств настолько велико, что пренебрежение вязкоупругими эффектами может привести к значительной ошибке.

Ключевые слова: математическое моделирование; вязкоупругая жидкость; неизотермическое течение; полимерная композиция

THE IMPACT OF DISSIPATION ON THE FLOW OF VISCOELASTIC POLYMER COMPOUNDS IN A FLAT CHANNEL

Baranov A.V., Yunitskiy S.A.

*Gubkin Russian State Oil and Gas University (National Research University),
Moscow, Russia*

ABSTRACT

Mathematical model of non-isothermal flow of non-Newtonian fluid in convergent channel is presented. All important factors to be taken into account in the development of the model have been noted. Many assumptions were made on the basis of the fact that the flow occurs at low values of the Reynolds number and at a high Peclet number. This allows us to neglect inertia terms in the equation of motion and ignore axial thermal conductivity in the energy equation. Phan-Thien-Tanner model is used as a rheological model. In this regard, an overview of works that have appeared in recent years and dedicated to the study of the flow of fluids with such a rheological model in channels has been given. Thermal boundary conditions of the first kind and the energy dissipation are taken into account. The temperature dependence of the viscosity is not considered. The fluid temperature at the inlet of the channel and the temperature of the walls of the channel are different. This means that the composition in the channel will be heated both because of hot channel walls and due to energy dissipation. From the momentum equation using this rheological model, the velocity profile is obtained as expressed in an explicit form. The solution of the energy equation was analyzed numerically by the finite difference method. Results of calculations have been presented. A significant effect of Weissenberg and Brinkman numbers on the temperature profile and Nusselt number distribution along the channel has been shown. It was also noted that the inclusion of viscoelasticity with significant values of Weissenberg number tends to reduce dissipative heating of the liquid. This is reflected both in the temperature profiles and the local heat transfer on the channel wall. The calculations show that the impact of elastic properties is so great that neglect of viscoelastic effects can result in significant error.

Keywords: mathematical modeling; viscoelastic fluid; non-isothermal flow; polymer composition

Исследованию процессов реодинамики и теплообмена при течении неньютоновских сред в различных каналах посвящены многочисленные публикации, частичный обзор которых приведен [1]. В данной работе рассматривается течение высоковязкой полимерной композиции в плоском канале (рис.1). Температура среды T_0 и температура стенок канала T_w не совпадают. При этом считается, что T_w больше чем T_0 . Это означает, что композиция по мере течения в канале будет прогреваться как от горячих стенок канала, так и за счет диссипации энергии.

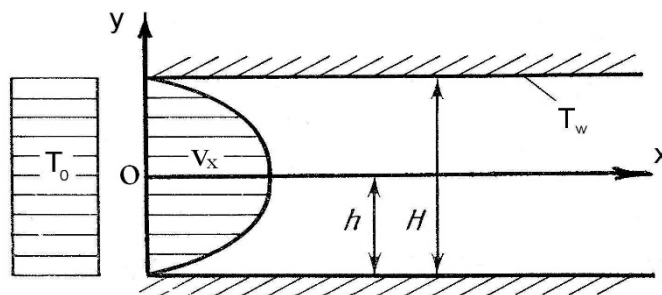


Рис.1. Схема течения в канале.

Полимерные композиции являются неньютоновскими средами. В этой связи можно отметить работы [2,3], где рассмотрено неизотермическое течение степенной жидкости в плоском канале при тепловых граничных условиях первого рода (заданная температура стенок канала). Температурная зависимость вязкости принималась в экспоненциальном виде, а уравнение энергии включало в себя

диссипативную функцию. Кроме того, данные работы учитывали скорость пристенного скольжения на основе модели, полученной в [4]

$$v_c = A |\tau_w|^s \quad (1)$$

где v_c – скорость скольжения на стенке, A , s – эмпирические константы.

Течение вязкоупругих композиций сопровождается ярко выраженными высокоэластичными эффектами. Заметную роль начинает играть первая разность нормальных напряжений, что требует введения в математическую модель реологического уравнения нелинейной вязкоупругой среды. В этой связи можно отметить работы [5,6], где задача была решена с учетом температурной зависимости вязкости для неизотермического течения вязкоупругой жидкости в плоском канале. В уравнении энергии учитывались диссипативные тепловыделения. Была выбрана дифференциальная реологическая модель второго порядка, описывающая все характерные особенности поведения полимерных композиций – аномалия вязкости, первая и вторая разности нормальных напряжений. Согласно этой модели тензор напряжений определяется кинематическими тензорами скорости деформации B_1 и ускорения деформации B_2 (тензоры Ривлина-Эриксона). Однако среды, описываемые дифференциальными моделями подобного типа, называются жидкостями без памяти, т.к. компоненты тензора напряжений в данный момент времени не учитывают в достаточной степени предысторию деформаций и напряжений. В последние годы в мировой литературе считается, что наилучшие результаты при описании течений нелинейных вязкоупругих сред дают реологические модели релаксационного (скоростного) типа. Одной из наиболее эффективных моделей этого ряда является модель Фан-Тьен-Таннера (ФТТ) [7-20], упрощенная форма которого может быть записана в следующем виде [18]

$$f(tr\tau)\tau + \lambda \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \tau - \tau \cdot \nabla \vec{V}^T - \nabla \vec{V} \cdot \tau \right) = \mu (\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T) \quad (2)$$

где τ – экстра тензор напряжений, $f(tr\tau)$ – функция первого инварианта (так называемого следа) экстра тензора напряжений, λ – время релаксации, \vec{V} – вектор скорости, μ – вязкость. Известно [21], что для большинства эластомеров при малых скоростях деформации порядка 10^{-2} - 10^{-4} с⁻¹ напряжение сдвига пропорционально скорости сдвига. При этом вязкость μ для основных каучуков находится в интервале 1-10 МПа·с.

Функция $f(tr\tau)$ может быть записана как в экспоненциальном, так и в линейном виде [18]. В данной работе для упрощения выкладок примем линейную форму зависимости

$$f(tr\tau) = 1 + \frac{\varepsilon \lambda}{\mu} tr\tau \quad (3)$$

где ε – реологическая константа, обратно пропорциональная продольной вязкости. Так, для некоторых марок резиновых смесей на основе различных каучуков экспериментально определено, что $\varepsilon = 1$ и $\lambda \approx 0,05$ с [22].

Рассматриваемые полимерные композиции обладают высокой вязкостью, поэтому их течение осуществляется при низких значениях критерия Рейнольдса. Это позволяет, во-первых, не рассматривать гидродинамический начальный участок и на входе в канал профиль скорости считать развитым. Во-вторых, можно

пренебречь инерционными членами в уравнении движения. Принимается также, что поперечные (вторичные) потоки в канале отсутствуют, т.е. можно ограничиться только одной продольной компонентой скорости v_x . В этом случае реологические уравнения записываются в виде следующей системы [18]

$$f(\tau_{xx}) \tau_{xx} = 2\lambda \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (4)$$

$$f(\tau_{xx}) \tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) записаны в предположении $\tau_{yy} = 0$. Если поделить (4) на (5), то получим

$$\tau_{xx} = \frac{2\lambda}{\mu} \tau_{xy}^2 \quad (6)$$

Таким образом, система реологических уравнений, записанных в безразмерном виде, запишется следующим образом

$$\sigma_{xx} = \frac{2Wi}{\bar{\mu}} \sigma_{xy}^2 \quad (7)$$

$$f(\sigma_{xx}) \sigma_{xy} = \bar{\mu} \frac{\partial V_x}{\partial Y} \quad (8)$$

где

$$f(\sigma_{xx}) = 1 + \frac{\varepsilon Wi}{\bar{\mu}} \sigma_{xx} \quad (9)$$

$Y = y/h$, $V_x = v_x / \bar{v}_x$, $\bar{\mu} = \mu / \mu_w$, $\sigma_{xy} = \frac{\tau_{xy} h}{\bar{\mu}_w \bar{v}_x}$, $Wi = \frac{\lambda \bar{v}_x}{h}$, Wi – число Вайсенберга, \bar{v}_x – средняя скорость потока.

Реологические уравнения (7) и (8) дополняются уравнением движения в безразмерном виде [23]

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial Y} = \frac{dP}{dX} \quad (10)$$

Для неизотермического случая решение гидродинамической задачи проводится одновременно с нахождением поля температуры. Необходимо подчеркнуть, что известные в настоящее время работы, посвященные рассмотрению теплообмена при течении жидкости Фан-Тьен-Таннера [16,19,20] в каналах, выполнены при условии постоянной, не зависящей от температуры вязкости. Это же можно сказать и о публикациях, использующие другие реологические модели, например, популярную на сегодня модель Гизекуса [24,25] Резиновые смеси обладают низкой температуропроводностью. В результате течение таких сред осуществляется, как правило, при высоких значениях критерия Пекле ($Pe > 100$). Это позволяет пренебречь в уравнении энергии осевой теплопроводностью по сравнению с конвективным теплопереносом. Уравнение энергии с учетом диссипации энергии имеет вид

$$V_x \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{Br}{Pe} \sigma_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial Y} \quad (11)$$

Используется также уравнение постоянства расхода

$$\int_0^1 V_x dY = 1 \quad (12)$$

где $P = \frac{ph}{\mu_w \bar{v}_x}$, $X = x/h$, $\theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}$, $Pe = \frac{\bar{v}_x h}{a}$, $Br = \frac{\mu_w \bar{v}_x^2}{\lambda(T_0 - T_w)}$, Pe – число Пекле,

Br – число Бринкмана, p – давление, T_w – температура стенок канала, T_0 – температура среды на входе в канал, λ – коэффициент теплопроводности, a – коэффициент температуропроводности.

Систему (7)-(12) необходимо дополнить также граничными условиями

$$Y = 0 \quad \frac{\partial V_x}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (13)$$

$$Y = 1 \quad V_x = 0, \quad \theta = 1 \quad (14)$$

$$X = 0 \quad \theta = 0 \quad (15)$$

Можно отметить, что данная реологическая модель (ФТТ) предсказывает аномалию вязкости. Если для определения эффективной вязкости исходить из уравнения $\sigma_{xy} = \bar{\mu}_e \dot{\gamma}_{xy}$, то из (8) и (9) для определения $\bar{\mu}_e$ получим

$$\bar{\mu}_e = \frac{\bar{\mu}}{1 + 2\varepsilon Wi^2 \sigma_{xy}^2 \bar{\mu}^{-2}} \quad (16)$$

После первого интегрирования уравнения движения (10) с учетом граничного условия (13) получим

$$\sigma_{xy} = \frac{dP}{dX} Y \quad (17)$$

Подставив (7) и (17) в (9), имеем

$$f(\sigma_{xx}) = 1 + \frac{2\varepsilon Wi^2}{\bar{\mu}^2} \left(\frac{dP}{dX} \right)^2 Y^2 \quad (18)$$

Тогда подстановка (18) в (8) дает следующее

$$\frac{\partial V_x}{\partial Y} = \frac{dP}{dX} Y + \frac{2\varepsilon Wi^2}{\bar{\mu}^2} \left(\frac{dP}{dX} \right)^3 Y^3 \quad (19)$$

После повторного интегрирования с учетом граничного условия (14) получим выражение для профиля скорости

$$V_x = \frac{dP}{dX} \frac{Y^2 - 1}{2} + 2\varepsilon Wi^2 \left(\frac{dP}{dX} \right)^3 \int_1^Y \frac{Y^3}{\bar{\mu}^2} dY \quad (20)$$

Неизвестный градиент давления можно найти, используя условие постоянства расхода (12)

$$-\frac{1}{3} \frac{dP}{dX} + 2\varepsilon Wi^2 \left(\frac{dP}{dX} \right)^3 \int_0^1 F(X, Y) dY = 1 \quad (21)$$

где $F(X, Y) = \int_1^Y \frac{Y^3}{\bar{\mu}^2} dY$.

В данной работе решение поставленной задачи проводилось для случая постоянной вязкости при условии $\bar{\mu} = 1$. В этом случае профиль скорости находится следующим образом

$$V_x = \left(\frac{dP}{dX} \right) \frac{Y^2 - 1}{2} + \varepsilon Wi^2 \left(\frac{dP}{dX} \right)^3 \frac{Y^4 - 1}{2} \quad (22)$$

При этом изотермический градиент давления определяется из решения кубического уравнения

$$\frac{1}{3} \left(\frac{dP}{dX} \right) + \frac{2}{5} \varepsilon Wi^2 \left(\frac{dP}{dX} \right)^3 + 1 = 0 \quad (23)$$

После этого решается уравнение энергии (11). В [26] распределение температуры искалось с помощью метода коллокаций. В данной же работе использовался численный метод конечных разностей.

Среднемассовая температура в размерном и безразмерном виде определяется следующим образом

$$T_m = \frac{\int_0^h T v_x dy}{\int_0^h v_x dy}; \quad \theta_m = \int_0^1 \theta V_x dY \quad (24)$$

Число Нуссельта, характеризующее локальную теплоотдачу на стенке канала, в размерном и безразмерном виде определяется таким образом

$$Nu = \frac{\alpha h}{\lambda} = \frac{h}{|T_m - T_w|} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=h}, \quad Nu = \frac{1}{\theta_m} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=1} \quad (25)$$

где α – коэффициент теплоотдачи на стенке канала, T_m – среднемассовая температура среды в данном сечении канала.

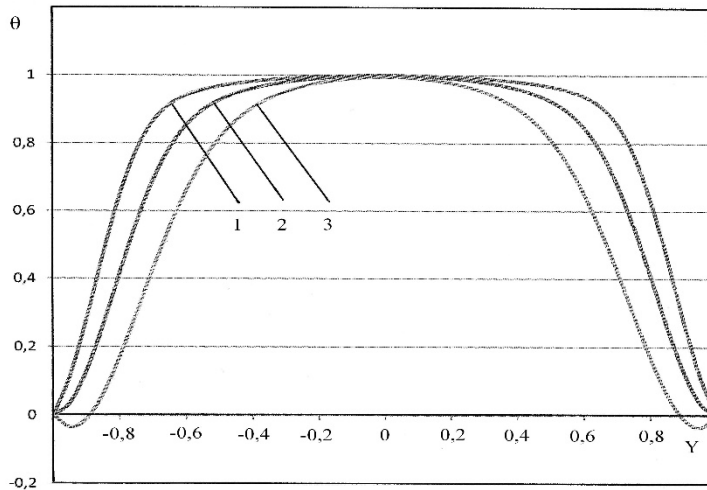


Рис.2. Развитие профиля температуры в канале. $B = -3$, $\varepsilon Wi^2 = 0$. 1. $X = 5$; 2. $X = 10$; 3. $X = 20$.

На основании полученного решения были проведены расчеты основных параметров данного процесса течения. На рис.2 и рис.3 показано существенное влияние чисел Вайсенберга и Бринкмана на развитие профиля температуры по длине канала. На рис.2 показаны профили температуры без учета вязкоупругих эффектов. Как известно [1,5,6], диссипация проявляет себя не вблизи входа в канал, а на достаточном расстоянии от него. На рис.2 видно, что при $X = 10$ под действием диссипативных тепловыделений профиль температуры у стенки

начинает заметно прогибаться. По мере же дальнейшего продвижения вдоль канала (при $X=20$) у стенки появляются так называемые «диссипативные горбы», когда температура композиции превышает температуру стенки.

Из рис.3 видно, что учет вязкоупругих свойств полимерной композиции приводит к снижению роли диссипации. Даже на достаточном расстоянии от входа в канал при $X=20$ профиль скорости у стенки хотя и прогибается, но никаких «диссипативных горбов» не возникает.

На рис.4 показано влияние критериев Wi и Br на распределение числа Нуссельта по длине канала. Сравнение кривых 1 и 2 позволяет оценить влияние вязкоупругости на локальную теплоотдачу при заданном уровне диссипации ($Br = -3$). Сравнение кривых 2 и 3 показывает влияние диссипации на число Нуссельта при заданном числе Wi . Видно, что при значительном уровне числа Wi диссипативные тепловыделения значительно скромнее влияют на число Nu , чем ожидалось. При этом важно подчеркнуть, что в отсутствие вязкоупругости диссипация проявляет себя, как известно, намного значительно [1-6].

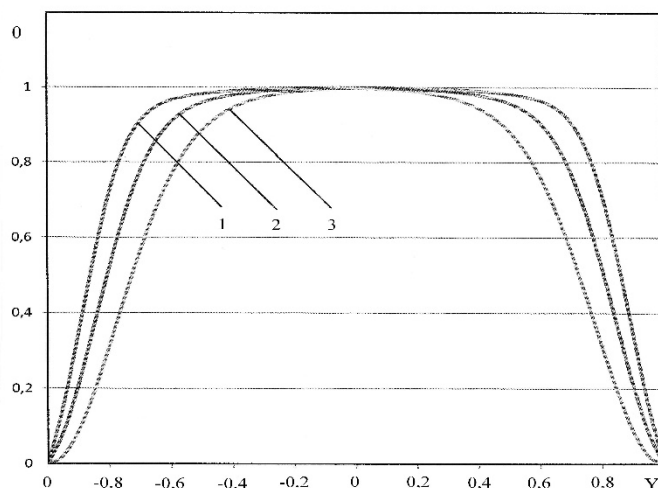


Рис.3. Развитие профиля температуры в канале. $Br = -3$, $\varepsilon Wi^2 = 10$. 1. $X=5$; 2. $X=10$; 3. $X=20$.

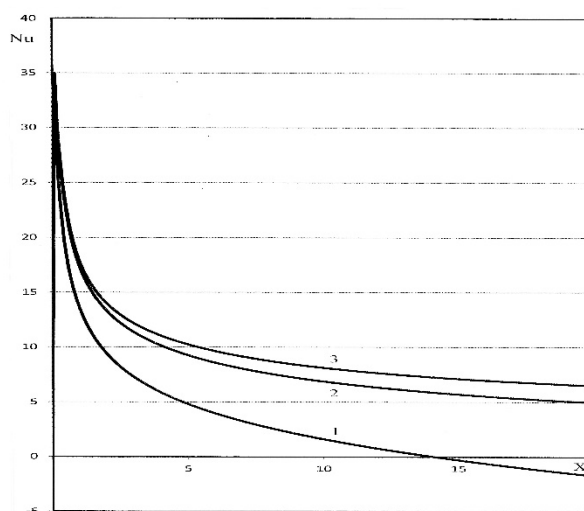


Рис.4. Изменение локального числа Нуссельта по длине канала. 1. $Br = -3$, $Wi=0$; 2. $Br = -3$, $Wi=10$; 3. $Br=0$, $Wi=10$.

ВЫВОДЫ

Поставлена и решена задача о теплообмене при диссипативном течении вязкоупругой жидкости Фан-Тьен-Таннера в плоском канале. Результаты расчетов показали значительное влияние чисел Вайсенберга и Бринкмана на трансформацию профиля температуры и локальную теплоотдачу на стенке канала. При этом отмечено, что учет вязкоупругих свойств жидкости при значительных значениях числа Вайсенберга ведет к заметному снижению роли диссипации в процессе разогрева среды. Также очевидно, что при учете температурной зависимости вязкости вклад диссипативного разогрева будет еще меньше. Из приведенных выше рисунков видно, что влияние высокоэластических свойств настолько велико, что пренебрежение вязкоупругими эффектами может привести к значительной ошибке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов А.В. *Неизотермическое течение реологически сложных сред в условиях химических превращений* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №3. – С.384-399.
2. Malkin A.Ya., Baranov A.V. *Flow of a non-Newtonian liquid through a channel when solidification of a liquid leads to wall slip* // J. Non-Newton. Fluid Mech. – 1991. – Vol.39. – №1. – Pp.55-66.
3. Баранов А.В., Дахин О.Х. *К вопросу оптимизации литьевого формования РТИ* // Каучук и резина. – 2013. – №5. – С.40-42.
4. Баранов А.В., Прохорова Л.Н., Скок В.И. *Пристенное скольжение наполненных резиновых смесей на основе БСК* // Каучук и резина. – 1993. – №1. – С.12-15.
5. Тябин Н.В., Дахин О.Х., Баранов А.В. *Влияние температуры и давления на течение реологически сложных сред в плоском канале* // Теплофизика высоких температур. – 1982. – Т.20. – №1. – С.81-87.
6. Тябин Н.В., Дахин О.Х., Баранов А.В. *Сопряженный теплообмен при течении в плоском канале неньютоновской жидкости с переменными свойствами* // Инженерно-физический журнал. – 1983. – Т.45. – №3. – С.380-386.
7. Peters Gerrit W.M., Schoonen Jeroen F.M., Baaijens Frank P.T. *On the performance of enhanced constitutive models for polymer melts in a cross-slot flow* // J. Non-Newton. Fluid Mech. – 1999. – Vol.82. – №2-3. – Pp.387-427.
8. Oliveira P.J., Pinho F.T. *Plane contraction flow of upper convected Maxwell and Phan-Thien-Tanner fluids as predicted by a finite-volume method* // J. Non-Newton. Fluid Mech. – 1999. – Vol.88. – №1-2. – Pp.63-88.
9. Aboubacar M., Matallah H., Webster M.F. *Highly elastic solutions for Oldroyd-B and Phan-Thien-Tanner fluids with a finite volume/element method: planar contraction flows* // J. Non-Newton. Fluid Mech. – 2002. – Vol.103. – №1. – Pp.65-103.
10. Hashemabadi S.H., Etemad S.G., Thibault J. *Analytical solution for dynamic pressurization of viscoelastic fluids* // Int. J. Heat and Fluid Flow. – 2003. – Vol.24. – Pp.137-144.
11. Alves M.S., Oliveira P.J., Pinho F.T. *Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and PTT fluids in planar contractions* // J. Non-Newton. Fluid Mech. – 2003. – Vol.110. – №1. – Pp.45-75.

12. Cruz D.O.A., Pinho F.T. *Skewed Poiseuille-Couette flows of sPTT fluids in concentric annuli and channels* // J. Non-Newton. Fluid Mech. – 2004. – Vol.121. – №1. – Pp.1-14.
13. Hashemabadi S.H., Mirnajafizadeh S.M. *Analytical solution of simplified Phan-Thien-Tanner fluid between nearly parallel plates of a small inclination* // J. Appl. Sciences. – 2007. – Vol.7. – №9. – Pp.1271-1278.
14. Cao Wei, Shen Changyu, Zhang Chujie. *Computing flow-induced stresses of injection molding based on the Phan-Thien-Tanner model* // Arch. Appl. Mech. – 2008. – Vol.78. – №5. – Pp.363-377.
15. Poole R.J., Alves M.A. *Velocity overshoots in gradual contraction flows* // J. Non-Newton. Fluid Mech. – 2009. – Vol.160. – №1. – Pp.47-54.
16. Chinyoka T. *Poiseuille flow of reactive Phan-Thien-Tanner liquids in 1D channel flow* // Trans. ASME. J. Heat Transfer. – 2010. – Vol.132. – №11. – Pp.111701/1-111701/7.
17. Yapici K., Karasozen B., Uludag Yu. *Numerical analysis of viscoelastic fluids in steady pressure-driven channel flow* // Trans. ASME. J. Fluids Eng. – 2012. – Vol.134. – №5. – Pp.051206/1-051206/9.
18. Ferras Luis L., Nobrega Joao M., Pinho Fernando T. *Analytical solutions for channels flows of Phan-Thien-Tanner and Giesekus fluids slip* // J. Non-Newton. Fluid Mech. – 2012. – Vol.171-172. – Pp.97-105.
19. Ананьев Д.В., Кайнова А.А. *Теплоперенос и гидродинамика при ламинарном течении вязкоупругой жидкости Фан-Тьен-Таннера в конвергентном канале* // Изв. РАН. Энергетика. – 2014. – №5. – С.51-64.
20. Ананьев Д.В., Халитова Г.Р., Вачагина У.К. *Гидродинамика и теплоперенос при ламинарном течении вязкоупругой жидкости в плоскощелевом канале* // Теплофиз. и аэромех. – 2015. – Т.22. – №1. – С.49-60.
21. Баранов А.В. *Неизотермическое течение вязкоупругих эластомерных композиций в сходящемся канале* // Каучук и резина. – 2016. – №4. – С.34-37.
22. Вачагина Е.К., Кайдыров А.И., Кайнова А.А., Халитова Г.Р. *Течение вязкоупругой жидкости в призматическом канале квадратного поперечного сечения на примере резиновых смесей* // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2016. – №1. – С.9-17.
23. Баранов А.В., Тимофеев С.В., Малкин А.Я. *Физическая модель течения с импрегнированием анизотропного слоя* // Инженерно-физический журнал. – 1995. – Т.68. – №5. – С.845-851.
24. Mahdavi Khatibi A., Mirzazadeh M., Rashidi F. *Forced convection heat transfer of Giesekus viscoelastic fluid in pipes and channels* // Heat Mass Transfer. – 2010. – Vol.46. – Pp.405-412.
25. Hadi Mekarizadeh, Maedeh Asgharian, Ahmadrza Raisi. *Heat transfer in Couette-Poiseuille flow between parallel plates of the Giesekus viscoelastic fluid* // J. Non-Newton. Fluid Mech. – 2013. – Vol.196. – Pp.95-101.
26. Баранов А.В., Балинов А.И. *Математическая модель неизотермического течения эластомеров в сходящемся канале* // Каучук и резина. – 1998. – №6. – С.39-45.

REFERENCES

1. Baranov A.V. *Nonisothermal flow of rheologically complex media under conditions of chemical conversions*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2010, Vol.16, No.3, Pp.384-399.

2. Malkin A.Ya., Baranov A.V. *Flow of a non-Newtonian liquid through a channel when solidification of a liquid leads to wall slip*. J. Non-Newton. Fluid Mech., 1991, Vol.39, No.1, Pp.55-66.
3. Baranov A.V., Dakhin O.K. *Optimising the injection moulding of mechanical rubber goods*. Kauchuk i rezina, 2013, No.5, Pp.40-42.
4. Baranov A.V., Prokhorova L.N., Skok V.I. *Wall slip of filled rubber mixtures based on BSK*. Kauchuk i rezina, 1993, No.1, Pp.12-15.
5. Tyabin N.V., Dakhin O.Kh., Baranov A.V. *Influence of temperature and pressure on the flow of rheologically complex media in a plane channel*. Teplofizika Vysokikh Temperatur, 1982, Vol.20, No.1, Pp.81-87.
6. Tyabin N.V., Dakhin O.Kh., Baranov A.V. *Conjugate heat transfer during plane channel flow of a non-Newtonian fluid with variable properties*. Inzh.-Fiz. Zhurnal, 1983, Vol.45, No.3, Pp.380-386.
7. Peters Gerrit W.M., Schoonen Jeroen F.M., Baaijens Frank P.T. *On the performance of enhanced constitutive models for polymer melts in a cross-slot flow*. J. Non-Newton. Fluid Mech., 1999, Vol.82, No.2-3, Pp.387-427.
8. Oliveira P.J., Pinho F.T. *Plane contraction flow of upper convected Maxwell and Phan-Thien-Tanner fluids as predicted by a finite-volume method*. J. Non-Newton. Fluid Mech., 1999, Vol.88, No.1-2, Pp.63-88.
9. Aboubacar M., Matallah H., Webster M.F. *Highly elastic solutions for Oldroyd-B and Phan-Thien-Tanner fluids with a finite volume/element method: planar contraction flows*. J. Non-Newton. Fluid Mech., 2002, Vol.103, No.1, Pp.65-103.
10. Hashemabadi S.H., Etemad S.G., Thibault J. *Analytical solution for dynamic pressurization of viscoelastic fluids*. Int. J. Heat and Fluid Flow, 2003, Vol.24, Pp.137-144.
11. Alves M.S., Oliveira P.J., Pinho F.T. *Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and PTT fluids in planar contractions*. J. Non-Newton. Fluid Mech., 2003, Vol.110, No.1, Pp.45-75.
12. Cruz D.O.A., Pinho F.T. *Skewed Poiseuille-Couette flows of sPTT fluids in concentric annuli and channels*. J. Non-Newton. Fluid Mech., 2004, Vol.121, No.1, Pp.1-14.
13. Hashemabadi S.H., Mirnajafizadeh S.M. *Analytical solution of simplified Phan-Thien-Tanner fluid between nearly parallel plates of a small inclination*. J. Appl. Sciences, 2007, Vol.7, No.9, Pp.1271-1278.
14. Cao Wei, Shen Changyu, Zhang Chujie. *Computing flow-induced stresses of injection molding based on the Phan-Thien-Tanner model*. Arch. Appl. Mech., 2008, Vol.78, No.5, Pp.363-377.
15. Poole R.J., Alves M.A. *Velocity overshoots in gradual contraction flows*. J. Non-Newton. Fluid Mech., 2009, Vol.160, No.1, Pp.47-54.
16. Chinyoka T. *Poiseuille flow of reactive Phan-Thien-Tanner liquids in 1D channel flow*. Trans. ASME. J. Heat Transfer, 2010, Vol.132, No.11, Pp.111701/1-111701/7.
17. Yapici K., Karasozen B., Uludag Yu. *Numerical analysis of viscoelastic fluids in steady pressure-driven channel flow*. Trans. ASME. J. Fluids Eng., 2012, Vol.134, No.5, Pp.051206/1-051206/9.
18. Ferras Luis L., Nobrega Joao M., Pinho Fernando T. *Analytical solutions for channels flows of Phan-Thien-Tanner and Giesekus fluids slip*. J. Non-Newton. Fluid Mech., 2012, Vol.171-172, Pp.97-105.

19. Ananov D.V., Kainova A.A. *Heat transfer and hydrodynamics during laminar flow of elastomeric Phan-Thien-Tanner liquid in convergent channel*. Izvestiya RAN, Energetika, 2014, No.5, Pp.51-64.
20. Ananov D.V., Halitova G.R., Vachagina U.K. *Hydrodynamics and heat transfer during laminar flow of elastomeric liquid in a flat channel*. Teplofizika i Aeromehanika, 2015, Vol.22, No.1, Pp.49-60.
21. Baranov A.V. *Non-isothermal flow of viscoelastic elastomeric compounds in convergent channel*. Kauchuk i rezina, 2016, No.4, Pp.34-37.
22. Vachagina E.K., Kaidirov A.I., Kainova A.A., Khalitova G.R. *Flow of viscoelastic fluid in a prismatic square cross-section channel on the example of rubber mixtures*. Izvestiya RAN, Mekhanika zhidkosti i gaza, 2016, No.1, Pp.9-17.
23. Baranov A.V., Timofeev S.V., Malkin A.Y. *Physical model of flow with anisotropic layer impregnation*. Inzh.-Fiz. Zhurnal, 1995, Vol.68, No.5, Pp.845-851.
24. Mahdavi Khatibi A., Mirzazadeh M., Rashidi F. *Forced convection heat transfer of Giesekus viscoelastic fluid in pipes and channels*. Heat Mass Transfer, 2010, Vol.46, Pp.405-412.
25. Hadi Mokarizadeh, Maedeh Asgharian, Ahmadreza Raisi. *Heat transfer in Couette-Poiseuille flow between parallel plates of the Giesekus viscoelastic fluid*. J. Non-Newton. Fluid Mech., 2013, Vol.196, Pp.95-101.
26. Baranov A.V., Balinov A.I. *Mathematical model of nonisothermal flow of elastomers in a convergent channel*. Kauchuk i rezina, 1998, No.6, Pp.39-45.

Поступила в редакцию 29 января 2017 года.

Сведения об авторах:

Баранов Александр Викторович – д.ф.-м.н., проф., Кафедра Высшей математики, Российский Государственный Университет нефти и газа имени И.М. Губкина, г. Москва, Россия; e-mail: alexvbaranov@yahoo.co.uk

Юницкий Сергей Александрович – к.ф.-м.н., доц., Кафедра Высшей математики, Российский Государственный Университет нефти и газа имени И.М. Губкина, г. Москва, Россия