

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В СВЯЗНЫХ ЗАДАЧАХ О ПРЯМОМ ПРЕВРАЩЕНИИ В ЦИЛИНДРЕ И СФЕРЕ ИЗ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ*

Машихин А.Е.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Решению проблемы о нахождении напряженно-деформированного состояния в краевых задачах для сферы и цилиндра из сплавов с памятью формы (СПФ) было посвящено ряд работ. В этих работах решения трактовались как решения несвязных задач, т.к. не были найдены соответствующие температурные поля. На самом деле, на основании методов, использованных в этих работах, и некоторых допущениях можно найти такое распределение температур, что полученные температурные поля и напряженно-деформированное состояние можно будет трактовать как решение однократно связанной задачи.

В данной работе были получены температурные поля в сфере и цилиндре из сплавов с памятью формы, материал которых первоначально находился в полностью аустенитном фазовом состоянии и претерпевает прямое мартенситное фазовое превращение под действием постоянного внутреннего и внешнего давлений. Также рассматривается постановка, где дополнительно помимо давления на цилиндр действует постоянная растягивающая продольная сила. При решении пренебрегается упругими и температурными деформациями по сравнению с фазово-структурными. Дополнительно считается, что объемная доля мартенситной фазы в каждый момент времени распределена по материалу равномерно.

Помимо этого, рассматривается вопрос о сравнении полученных результатов для цилиндров под действие внутреннего/внешнего давления в двух постановках – при условии плоской деформации и при условии нулевой осевой силы. Также затрагивается тема о возможности сведения решения задачи для цилиндра и сферы в варианте, когда оба давления (внутреннее и внешнее) отличны от нуля, к решению задачи в варианте, когда одно из давлений равно нулю.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; толстостенный цилиндр; толстостенная сфера; прямое превращение, внутреннее (внешнее) давление, аналитическое решение; температурные поля

TEMPERATURE FIELDS IN THE CONNECTED PROBLEMS IN THE CYLINDER AND SPHERE FROM SHAPE MEMORY ALLOYS AT THE DIRECT PHASE TRANSFORMATION

Mashikhin A.E.

Moscow State University, Moscow, Russia

* Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, проект № 14-01-00189

ABSTRACT

The solution of the stress-strain state in boundary value problems for the sphere and cylinder from the shape memory alloys (SMA) have been shown in several studies. In these studies, the solutions were treated as the solutions of disconnected problem, because the temperature fields were not found. In fact, basing on methods derived from these studies and certain assumptions, we can find the temperature distribution, so that the resulting temperature field and the stress-strain state could be treated as the solution of the single connected problem.

In this paper, the temperature fields of the cylinder and sphere from shape memory alloys were obtained. Their material was originally in a fully austenitic phase state and undergoes direct martensitic phase transformation under the influence of the constant internal and external pressures. In addition, the cylinder under pressure and longitudinal constant tensile force is also considered. Elastic and thermal deformation are neglected due to the phase-structural. Also it is considered that the volume fraction of martensitic phase at any given time is uniformly distributed through the material.

In addition, the issue of comparing the obtained results for the cylinders under the influence of the internal/external pressure in case of plane strain deformation and in case of a zero longitudinal force is considered. Also it touches upon the possibility of obtaining the solution for the cylinder under both positive internal and external pressures from the solution, in which one of them equals zero.

Keywords: shape memory alloys; thick-walled cylinder; thick-walled sphere; direct transformation; internal (external) pressure; analytical solution; temperature fields

ВВЕДЕНИЕ

Явление накопления деформаций в процессе прямого превращения, которое имеет место во время охлаждения материала из СПФ (сплавов с памятью формы) под действием некоторой нагрузки [1] часто используется с целью задания элементам из СПФ начальной фазово-структурной деформации, которая впоследствии будет сниматься при нагреве за счет явления памяти формы. Для того, чтобы смоделировать процесс накопления деформаций прямого превращения для статических неопределимых задач требуется решить соответствующие краевые задачи. Одни из простейших таких задач – это задачи кручения, изгиба и аналог задачи Ламе для толстостенной цилиндрической трубы, и аналогичная проблема для сферы. Задачи об изгибе элементов из СПФ рассматривались в [2-4], задачи о кручении – в [5-8], аналог задачи о толстостенной трубе из СПФ – в [9-11], аналогичная проблема для сферы [12].

Осесимметричные задачи о деформировании толстостенных цилиндров из СПФ в различных постановках решались, в основном, численными методами в работах [13-21]. Численные решения задачи о поведении тонкостенной сферы из СПФ при прямом термоупругом фазовом превращении в рамках модели линейного поведения СПФ при фазовых превращениях [22-24] и геометрически нелинейной постановке получены в [25-27].

В статьях [10-12] были получены решения задач о напряженно-деформированном состоянии цилиндра и сферы под действием постоянного внутреннего давления при условии, что параметр фазового состава q не зависит от радиальной координаты r . Данные решения трактовались как решения несвязных задач, т.к. не были найдены соответствующие температурные поля.

На самом деле, можно показать, что приведенными в этих работах способами можно решить и связную задачу при двух допущениях: независимость

параметра фазового состава q от радиальной координаты r и пренебрежение упругими деформациями. Для этого нужно найти такое точное распределение температур, чтобы напряженно-деформированное состояние и поле температур удовлетворяли условиям однократно связной задачи. Эта проблема и разрешалась в данной статье.

Стоит отметить, что рассматривается постановка, в которой упругие деформации не учитываются, и, как было получено в приведенных выше работах, решение в таком случае получается аналитическим, а напряженное состояние не зависит от параметра фазового состава q .

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассматривается прямое превращение сферы или цилиндра из СПФ с внутренними и внешними радиусами, равными a и b соответственно, под действием внутреннего и внешнего неотрицательных давлений p_a и p_b соответственно, в рамках пренебрежения упругими деформациями и предположения о независимости объемной доли мартенситной фазы q от радиальной координаты r . В данной постановке решение является точным аналитическим решением соответствующей связной задачи.

Величина $q \in [0, 1]$ не зависит от координат точек тела и является монотонно возрастающим параметром процесса. Но, вообще говоря, от этого параметра зависят искомые величины смещений и деформаций. В случае справедливости положения об активных процессах пропорционального нагружения [28] параметр фазового состава q связан с температурой T и напряжениями соотношением [Роджерс, Дирм]

$$q = \frac{1}{2} [1 - \cos(\pi t_\sigma)]; M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\rho_D \sigma_i \varphi_1(\sigma_i)}{\Delta S};$$

$$t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0} = t + \frac{\rho_D \sigma_i \varphi_1(\sigma_i)}{\Delta S (M_s^0 - M_f^0)}; t = \frac{M_s^0 - T}{M_s^0 - M_f^0}; \quad (1.1)$$

Здесь M_s^0 , M_f^0 – температуры начала и окончания прямого превращения в данном СПФ при условии отсутствия напряжений; M_s^σ – соответствует наличию напряжений; ΔS – скачек объемной плотности энтропии при переходе из мартенситного состояния в аустенитное; σ_i – интенсивность напряжений; $\varphi_1(\sigma_i)$ – материальная функция, трактуемая как интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в аустенитном состоянии СПФ; ρ_D – параметр материала, коррелирующий с интенсивностью кристаллографической деформации фазового превращения. В формулах (1.1) не учитываются малые слагаемые, связанные с объемным эффектом реакции прямого фазового превращения и переменностью упругих модулей.

Для нахождения температурных полей необходимо выразить функцию температуры T из (1.1) через интенсивность напряжений σ_i и параметр фазового состава q

$$T = M_s^0 + \frac{\rho_D \sigma_i \varphi_1(\sigma_i)}{\Delta S} - \frac{(M_s^0 - M_f^0)}{\pi} \arccos(1 - 2q) \quad (1.2)$$

Из (1.2) следует, что значение температуры T полностью определяется значением интенсивности напряжений σ_i , которое уже известно из готовых решений, полученных в [10-12], где σ_i является функцией двух переменных – параметра фазового состава q и радиальной компоненты r .

В данной работе использовались следующие числовые значения:

$$\sigma_0 = 176 \text{ МПа}; \rho_D = 8\%; M_s^0 = 313^\circ \text{ K}; M_f^0 = 293^\circ \text{ K}; \Delta S = 0.00366 \frac{\text{Па}}{\text{K}}.$$

2. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦИЛИНДРА ПРИ УСЛОВИИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Решение задачи о прямом превращении в цилиндре из СПФ под действием постоянного внутреннего или внешнего давления было получено в [10]. Там же было получено разрешающее уравнение суть проинтегрированное уравнение равновесия с граничными условиями для радиального напряжения, где разность кольцевого и радиального напряжения в уравнении равновесия выражена через интенсивность напряжений, которое в свою очередь может быть выражено через конечное соотношение, зависящее от интенсивности деформаций. Конечный вид этого уравнения приводится ниже. Здесь и далее все величины, участвующие в формулах, являются безразмерными. (Все размерные величины, связанные с напряжениями были обезразмерены характерным напряжением σ_0 ; размерные величины, связанные с перемещениями – внутренним радиусом a)

$$\int_1^{b/a} \varphi^{-1} \left(\frac{\lambda}{r^2} \right) \frac{dr}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} |p_a - p_b| \quad (2.1)$$

где функция $\varphi(\sigma_i)$ суть функция распределения интенсивности микронапряжений (в данной работе в качестве $\varphi(\sigma_i)$ используется функция Лапласа). Незвестный параметр λ в уравнении (2.1) является искомым и через него выражаются все неизвестные параметры задачи

$$\sigma_i = \varphi^{-1} \left(\frac{\lambda}{r^2} \right); \sigma_r = -p_a \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^r \varphi^{-1} \left(\frac{\lambda}{\xi^2} \right) \frac{d\xi}{\xi}; \sigma_\varphi = \sigma_r \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i \quad (2.2)$$

$$w = r q \varepsilon_0 \pm \frac{\sqrt{3} \lambda \rho_D q}{2r}; \varepsilon_r = q \varepsilon_0 \mp \frac{\sqrt{3} \lambda \rho_D q}{2r^2}; \varepsilon_\varphi = q \varepsilon_0 \pm \frac{\sqrt{3} \lambda \rho_D q}{2r^2}; \varepsilon_z = 0; \quad (2.3)$$

Здесь верхний знак соответствует случаю, когда $p_a > p_b$, а нижний – $p_a < p_b$, σ_r и σ_φ – безразмерные компоненты тензора напряжений, w – безразмерное радиальное смещение, ε_k – компоненты тензора деформаций, ε_0 – линейная деформация объемного эффекта реакции прямого мартенситного превращения.

Как видно из (2.1) и (2.2) значение интенсивности напряжений σ_i определяется лишь модулем разности внешнего и внутреннего давлений. Во-первых, отсюда следует, что интенсивность напряжений будет одинакова в обоих случаях: когда приложено только внутренне давление и когда приложено только внешнее давление (с точно таким же значением). Во-вторых, решение задачи для интенсивности напряжений в случае, когда приложены оба ненулевых давления можно свести к решению задачи, в которой одно из давлений надо положить равным нулю, а другое – равным модулю разности этих давлений.

Впрочем, такой подход не приведет к убыстрению вычислений (равно как и к их замедлению).

Ниже представлены графики зависимости радиального (кривая 3), кольцевого (кривая 1) напряжений и интенсивности напряжений (кривая 2) от безразмерной радиальной компоненты r . Расчеты выполнены для цилиндра с относительной толщиной $b/a=1.5$. Рис.1,а соответствует случаю, когда приложено только внутреннее давление $p_a=0.3$; Рис.1,б – только внешнее $p_b=0.3$.

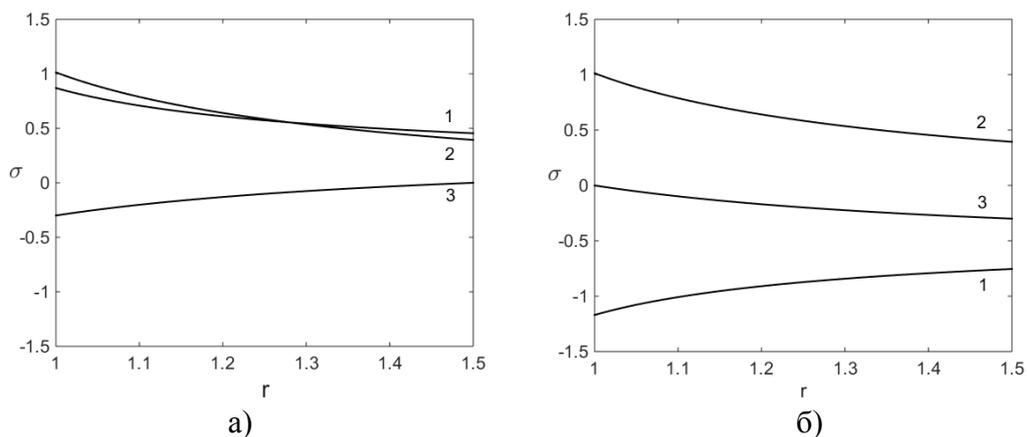


Рис.1.

Как следует из (1.2) значения температуры для заданной величины объемной доли мартенситной фазы полностью определяются значением интенсивности напряжений σ_i – поэтому графики температуры для обоих случаев (случая внутреннего и случая внешнего давлений) полностью идентичны.

На рис.2,а приведены графики зависимости температуры T (в Кельвинах) от параметра фазового состава q для случая внутреннего давления, для трех сечений внутреннего, срединного и внешнего (кривые 1-3 соответственно); на рис.2,б – в зависимости от безразмерной радиальной компоненты r для начала, середины и конца фазового перехода (кривые 1-3 соответственно). Оба графика построены для случая цилиндра с относительной толщиной $b/a=1.5$. под действием внутреннего давления $p_a=0.3$.

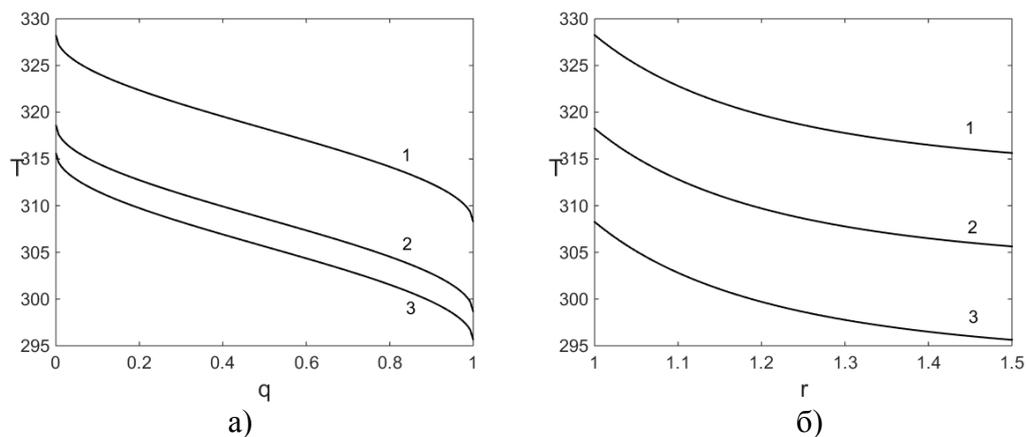


Рис.2.

Таким образом, в случае плоской деформации температурные поля как для случая внешнего давления, так и для случая такого же по значению внутреннего давления получаются полностью идентичными. Внутренняя поверхность цилиндра должна иметь более высокую температуру, чем внешняя, для чего лучше соответствует охлаждение снаружи.

3. РЕШЕНИЕ ДЛЯ СФЕРЫ

Решение задачи о прямом превращении в сфере из СПФ под действием постоянного внутреннего или внешнего давления было получено в [12]. В случае сферы разрешающее уравнение идентично, разрешающему уравнению для цилиндра (2.1) с точностью до степени радиальной координаты и числового коэффициента

$$\int_1^{b/a} \varphi^{-1} \left(\frac{\lambda}{r^3} \right) \frac{dr}{r} = \frac{1}{2} |p_a - p_b| \tag{3.1}$$

Неизвестный параметр λ в уравнении (3.1) является искомым и через него выражаются все неизвестные параметры задачи

$$\sigma_i = \varphi^{-1} \left(\frac{\lambda}{r^3} \right); \sigma_r = -p_a \pm 2 \int_1^r \varphi^{-1} \left(\frac{\lambda}{\xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi}; \sigma_\varphi = \sigma_r \pm \sigma_i \tag{3.2}$$

$$w = r q \varepsilon_0 \pm \frac{\lambda \rho_D q}{2r^2}; \varepsilon_r = q \varepsilon_0 \mp \frac{\lambda \rho_D q}{r^3}; \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\chi = q \varepsilon_0 \pm \frac{\lambda \rho_D q}{2r^3}; \tag{3.3}$$

Здесь верхний знак соответствует случаю, когда $p_a > p_b$, а нижний – $p_a < p_b$. Как и в случае цилиндра с плоской деформацией, здесь также верны все рассуждения по поводу тождественной схожести температурных полей для случая, когда приложено только внутреннее давление, со случаем, когда приложено такое же по значению, но только внешнее давление. Равно как верны и рассуждения о возможности сведения решения задачи в варианте с двумя ненулевыми давлениями к варианту, когда одно из них равно нулю – а другое равно модулю разности этих давлений.

Ниже на рис.3,а и рис.3,б представлены графики зависимости радиального, кольцевого напряжений и интенсивности напряжений от безразмерного значения радиуса r (кривые 1-3 соответственно) для сферы с относительной толщиной $b/a=1.5$. Рис.3,а соответствуют случаю, когда приложено только внутреннее давление $p_a = 0.3$, рис.3,б – только внешнее давление $p_b = 0.3$.

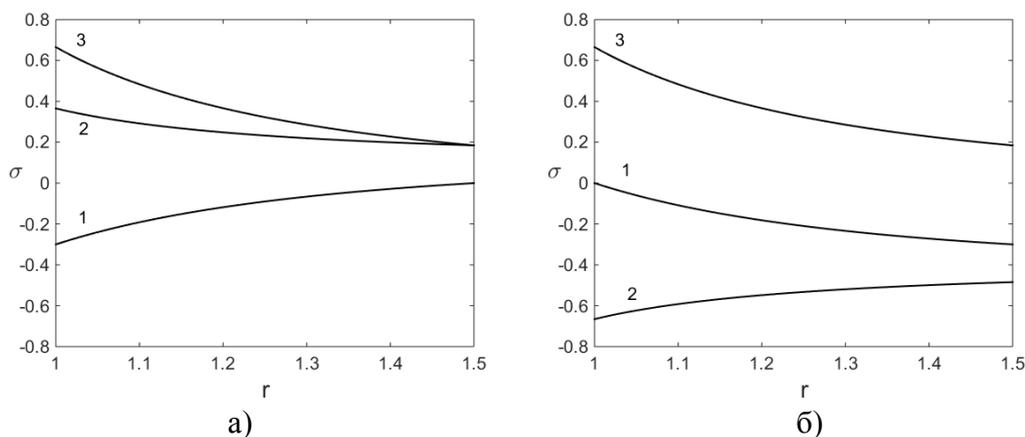


Рис.3.

Графики еще раз иллюстрируют тот факт, что интенсивность напряжений в обоих случаях одинаковая. В случае внутреннего давления радиальное напряжение является сжимающим, а кольцевые – растягивающими. В случае внешнего давления все напряжения являются сжимающими.

Ниже на рис.4,а и рис.4,б представлены графики зависимости температуры от параметра фазового состава q для внутреннего, срединного и внешнего сечений (кривые 1-3 соответственно) и от безразмерной радиальной компоненты r (для начала, середины и конца фазового перехода – кривые 1-3 соответственно) для сферы с относительной толщиной $b/a=1.5$ в случае действия внутреннего давления $p_a = 0.3$ (для случая внешнего давления они полностью идентичны)

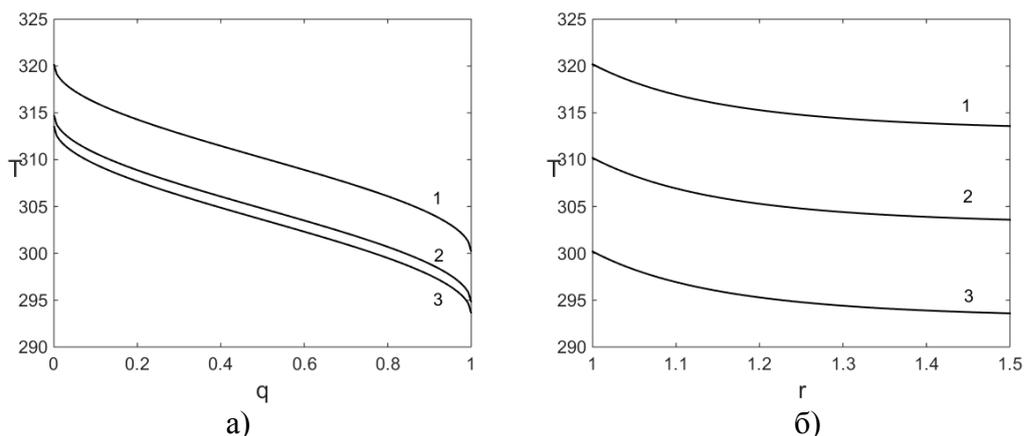


Рис.4.

Сравнение графиков распределения температур по радиальной координате свидетельствует о том, что перепад температур между внутренней и внешней поверхностью при одинаковых нагрузке и отношении радиусов для сферы существенно ниже, чем для цилиндра.

4. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦИЛИНДРА С ОСЕВОЙ СИЛОЙ

Решение задачи о прямом превращении в цилиндре из СПФ под действием постоянного внутреннего или внешнего давления и осевой силы P было получено в [11]. Разрешающая система уравнений имеет вид

$$\sigma_i = \varphi^{-1} \left(\frac{2\theta(r)}{3\rho_D} \right)$$

$$2C \int_1^{b/a} \frac{\sigma_i}{\theta(r)} \frac{dr}{r^3} = p_a - p_b$$

$$\int_1^{b/a} \left[2C \int_1^r \frac{\sigma_i}{\theta(y)} \frac{dy}{y^3} + \frac{\sigma_i}{\theta(r)} \left(\frac{C}{r^2} + \frac{3}{2} \hat{\mu} \right) \right] r dr = \frac{p_a}{2} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right] + \frac{P}{2\pi}$$

$$\theta(r) = \sqrt{\frac{3}{r^4} C^2 + \frac{9}{4} \hat{\mu}^2}$$

где C и $\hat{\mu}$ суть два неизвестных параметра, через которые выражаются все неизвестные величины задачи

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -p_a + 2C \int_1^r \frac{\sigma_i}{\theta(\xi)} \frac{d\xi}{\xi^3}; \sigma_\varphi = \sigma_r + \frac{2C}{r^2} \frac{\sigma_i}{\theta(r)} \\ \sigma_z &= \sigma_r + \left(\frac{C}{r^2} + \frac{3}{2} \hat{\mu} \right) \frac{\sigma_i}{\theta(r)}; \\ w &= \frac{C}{r} - \frac{rq}{2} (\hat{\mu} - 2\varepsilon_0); \varepsilon_r = -\frac{C}{r^2} - \frac{q}{2} (\hat{\mu} - 2\varepsilon_0); \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{C}{r^2} - \frac{q}{2} (\hat{\mu} - 2\varepsilon_0); \varepsilon_z = \mu q = q(\hat{\mu} + \varepsilon_0)\end{aligned}\quad (4.2)$$

Ниже на рис.5,а и рис.5,б представлены графики зависимости радиального, кольцевого, осевого напряжений и интенсивности напряжений (кривые 1-4 соответственно) от безразмерной радиальной компоненты r для цилиндра с относительной толщиной $b/a=1.5$ под действием осевой силы $P=1$. Рис.5,а соответствует случаю, когда приложено внутреннее давление $p_a=0.3$, рис.5,б – внешнее давление $p_b=0.3$.

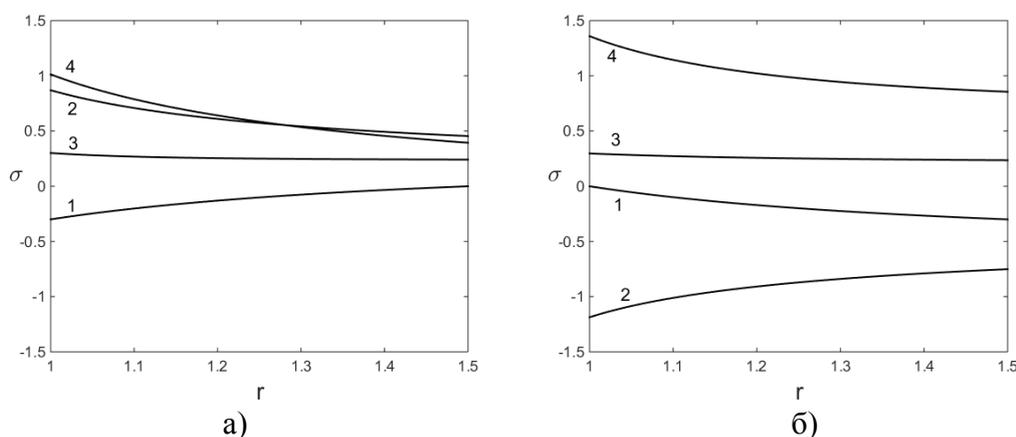


Рис.5.

Кривые для осевого напряжения для обоих случаев ведут себя одинаково – убывают ко внешней стороне цилиндра. Тем не менее, они не являются идентичными.

Ниже на рис.6.а. и рис.6.б. представлены графики зависимости температуры от параметра фазового состава для двух случаев выше. Три кривые на каждом графике соответствуют трем сечениям: внутреннему, срединному и внешнему (кривые 1-3 соответственно). Как видно, за счет того, что интенсивность напряжений во втором случае (когда приложено внешнее давление) больше, температуры также оказываются выше во втором случае.

Соответствующие температурные поля, но в зависимости от радиальной компоненты для начала, середины и конца фазового перехода (кривые 1-3 соответственно) представлены на рис.7,а и рис.7,б.

Таким образом, добавление осевой растягивающей силы принципиально никак не влияет на форму температурных кривых, по сравнению со случаем цилиндра с плоской деформацией. Тем не менее, в данной постановке свести решение задачи в варианте, когда приложены внутреннее давление и растягивающая осевая сила нельзя к варианту, когда действует внешнее давление и растягивающая осевая сила.

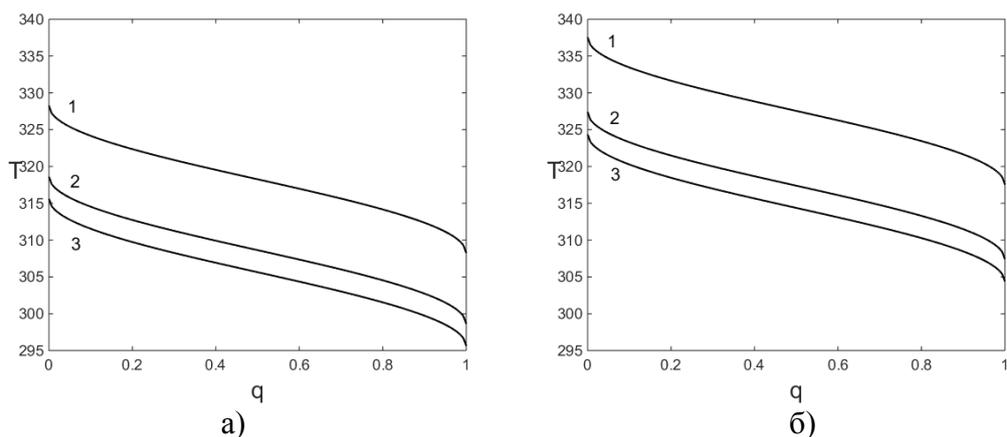


Рис.6.

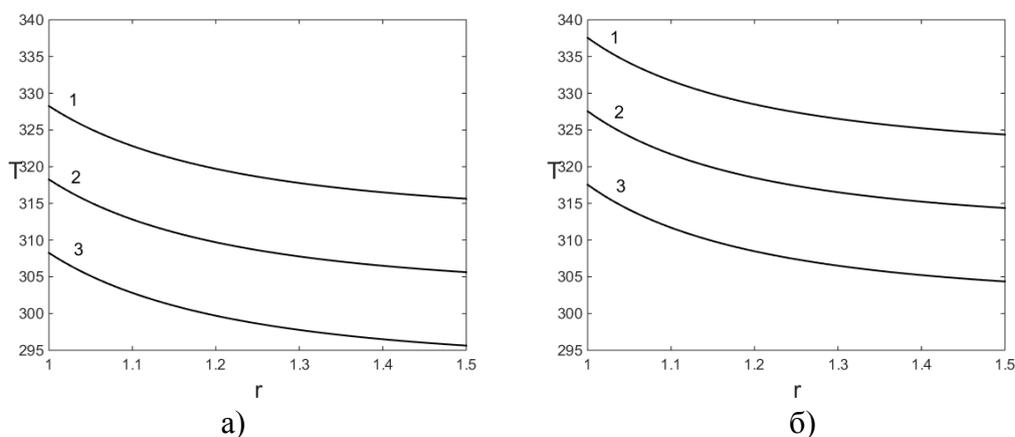


Рис.7.

5. СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ЦИЛИНДРА В СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ И В СЛУЧАЕ НУЛЕВОЙ ОСЕВОЙ СИЛОЙ

Интерес вызывают результаты, полученные при решении задач в двух постановках: прямое превращение в цилиндре под действием постоянного внутреннего давления $p_a = 0.3$ в предположении о плоской деформации (рис.8,а и рис.9,а) и прямое превращение в цилиндре под действием такого же постоянного внутреннего давления и нулевой осевой силой $P = 0$ (рис.8,б и рис.9,б). (Рассматриваемые цилиндры имеют относительную толщину $s/b/a=1.5$). На рис.8,а и рис.8,б представлены графики зависимости напряжений ($\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_i$ – кривые 1-3 соответственно) от безразмерной радиальной компоненты r . Кроме того, на рис.8,б приведен график 4 зависимости от радиальной координаты продольного напряжения. Если на внутренней стороне цилиндра значения интенсивности напряжения для случая нулевой продольной силы лишь немного превышают соответствующие значения для плоской деформации (порядка 3%), то на внешней стороне эта разница чуть больше (порядка 12%). Кроме того, в случае постановки с продольной силы, интенсивность напряжений всегда превосходит кольцевое напряжений, что неверно для случая плоской деформации.

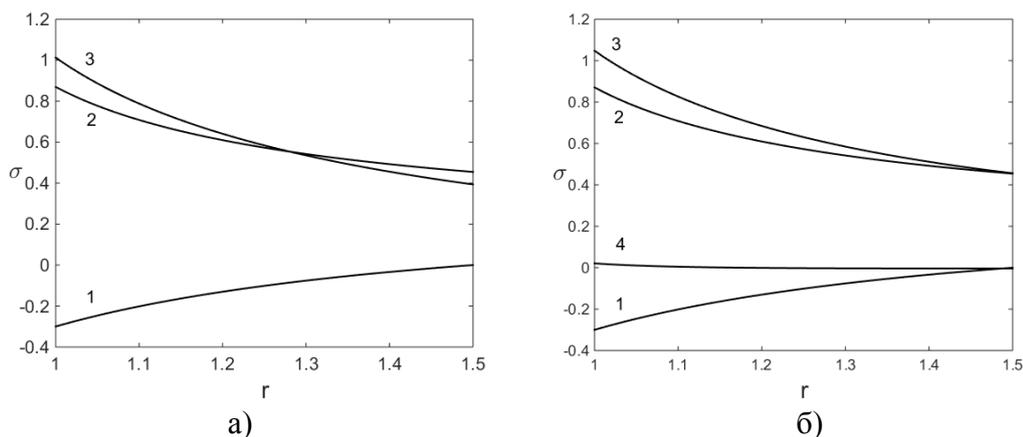


Рис.8.

Из рис.8,б видно, что продольное напряжение отлично от нуля. Тем не менее, из-за того, что получающаяся функция σ_z меняет знак – интеграл уравнения равновесия от σ_z получается равным нулю.

Ниже на рис.9,а и рис.9,б представлены графики зависимости температуры T от параметра фазового состава q для внутреннего, срединного и внешнего сечений цилиндра (кривые 1-3 соответственно). Рис.9,а соответствует цилиндру с плоской деформацией, рис.9,б – цилиндру с нулевой осевой силой. Ввиду того, что температуры зависят от интенсивности напряжений, то экстремальные значения температуры как на внутренней стороне цилиндра, так и на внешней в постановке с продольной нулевой силой несколько выше, чем в постановке с плоской деформацией, но ненамного – порядка 0.3%.

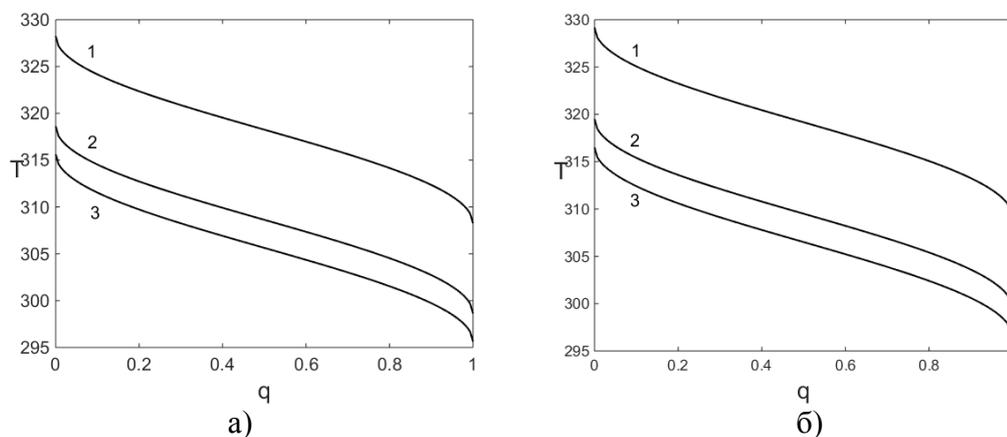


Рис.9.

Аналогичные графики (рис.10, рис.11) можно построить для случая, когда вместо внутреннего давления приложено внешнее $p_b = 0.3$. Рис.10,а и рис.11,а соответствуют постановке с плоской деформацией, рис.10,б и рис.11,б – постановке с продольной силой, равной нулю.

На рис.10,а и рис.10,б представлены графики зависимости напряжений ($\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_i$ и σ_z – кривые 1-4 соответственно) от безразмерной радиальной компоненты r .

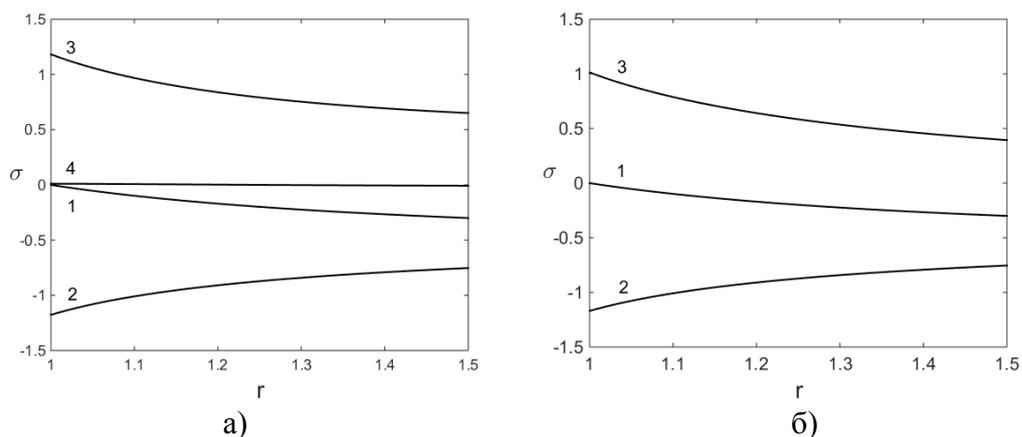


Рис.10.

Как видно на этих графиках разница между интенсивностями напряжений для двух постановок как на внутренней – так и на внешней стороне значительно больше (порядка 17% на внутренней и 62% на внешней стороне). Несмотря на такую высокую разницу в интенсивностях напряжений – графики температуры $T(q)$ на рис.11,а и рис.11,б для внутреннего, срединного и внешнего сечений цилиндра (кривые 1-3 соответственно) очень похожи, и экстремальные значения T для двух постановок отличаются не более чем на 1%.

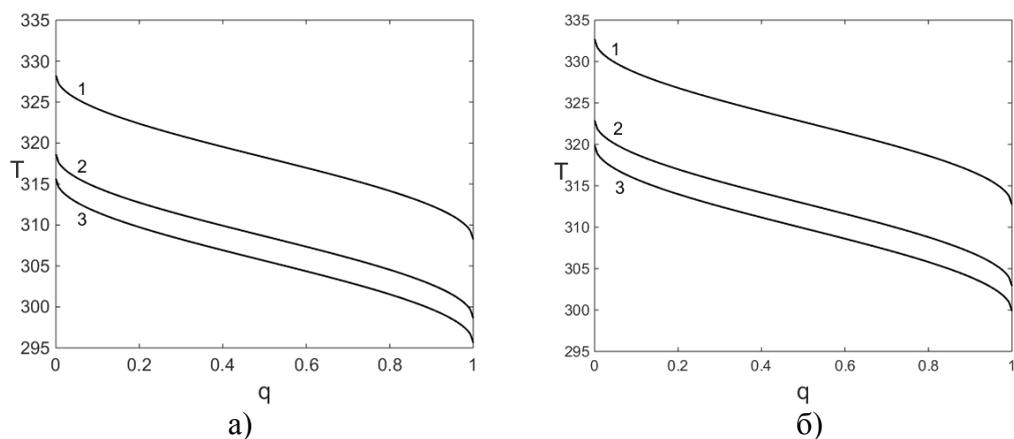


Рис.11.

Таким образом, различие между двумя постановками (с нулевой продольной силой и с плоской деформацией) не приводит к различным видам кривых или к совершенно другим диапазонам значений. Наоборот, решения очень схожи, особенно для случая внутреннего давления (где максимальная разница между интенсивностями напряжений не превосходит 15%). В случае внешнего давления разница в интенсивностях напряжений на внешней стороне высокая, но это не приводит к значительным различиям для температурных кривых.

В случае решения вопроса о прочности цилиндра в данных постановках, лучше рассматривать решение с нулевой продольной силой ввиду того, что значения интенсивности напряжений для такой постановки превосходят соответствующие значения для постановки с плоской деформацией как для случая внутреннего – так и для случая внешнего давления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в данной работе точные температурные поля, наряду с приведенными ранее решениями для напряжённо-деформированного состояния, удовлетворяют условиям однократно связной задачи и позволяют рассматривать выкладки из данной статьи как решение соответствующих однократно связных задач. Решения являются точными и получены в рамках предположений о неучете упругих деформаций и о равномерном распределении объемной доли мартенситной фазы по координатам.

Установлено, что как в случае цилиндра с плоской деформацией, так и в случае сферы, в варианте, когда приложено только одно из давлений – интенсивность напряжений, а как следствие и поле температур, не зависит от того, с какой стороны это давление действует. Более того, вариант решения задачи, когда действуют оба ненулевых давления можно свести к варианту решению, в котором одно из давлений можно положить нулевым, а другое равным модулю разности этих давлений. В случае цилиндра в постановке с осевой силой, данные соображения неверны.

Приведено сравнение двух постановок – цилиндр с плоской деформацией и цилиндр с нулевой осевой силой. Значения интенсивности напряжений во второй постановке превосходит советующие значения для первой постановки. Особенно это разница заметна в случае если приложено только внешнее давление. Тем не менее, эти различия в значениях интенсивности напряжений не приводит к сколько-нибудь заметным отличиям в температурных полях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Материалы с эффектом памяти формы: Справ. Изд.* / Под. ред. Лихачева В.А. – Т.2. – СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 1998. – 374 с.
2. Мовчан А.А. *Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – №1. – С.79-90.
3. Мовчан А.А., Тант Зин Аунг, Мовчан И.А. *Решение задач изгиба балок из сплавов с памятью формы в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов при фазовых и структурных превращениях* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т.15. – №3. – С.422-436.
4. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – №1. – С.37-53.
5. Мовчан А.А. *Кручение призматических стержней из сплавов с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – №6. – С.143-154.
6. Мовчан А.А., Тант Зин Аунг. *Анализ работы пружин из сплава с памятью формы в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т.15. – №4. – С.591-600.
7. Саганов Е.Б. *Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №3. – С.454-468.

8. Саганов Е.Б. *Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.454-468.
9. Машихин А.Е. *Задача о контакте цилиндра из сплава с памятью формы с упругой трубой при обратном фазовом превращении* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.624-636.
10. Мовчан А.А., Машихин А.Е. *Деформации кругового цилиндра из сплава с памятью формы при структурном переходе или прямом фазовом превращении* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №2. – С.235-247.
11. Машихин А.Е., Мовчан А.А. *Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2016. – №3. – С.100-114.
12. Мовчан А.А., Левин А.С. *Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенной сфере из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного давления* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №2. – С.221-236.
13. Лихачев В.А., Малинин В.Г., Шляхов С.А. *Расчет напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы, изготовленной из материала с памятью формы и испытывающей действие переменной температуры и давления* / Семинар «Материалы с новыми функциональными свойствами». Материалы. – Новгород; Боровичи, 1990. – С.161-163.
14. Лихачев В.А., Малинин В.Г., Шляхов С.А. *Численное моделирование эволюции напряженного состояния толстостенного цилиндра из материала, испытывающего мартенситные превращения при силовом воздействии* / XXV Всесоюзный семинар «Актуальные проблемы прочности». Материалы. – Нижний Новгород, 1991. – Т.1. – С.135-139.
15. Волков А.Е., Лихачев В.А., Слуцкер Ю.Ф. *Расчет термомеханического соединения методами структурно-аналитической теории* / XXVII Межреспубликанский семинар «Актуальные проблемы прочности». Материалы. – Ухта, 1992. – С.31-36.
16. Лихачев В.А., Малинин В.Г. *Структурно – аналитическая теория прочности*. – СПб.: Наука, 1993. – 471 с.
17. Кузнецов А.В. *Численное решение связанной осесимметричной задачи о прямом превращении для сплавов с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т.3-4. – С.71-81.
18. Likhachev V.A., Razov A.I., Volkov A.E. *Finite difference simulation of a thermomechanical coupling* / Second Intern. Conf. on Shape Memory and Superelastic Technologies SMST-97. Proceedings. – USA, California: Asilomar Conference Center, Pacific Grove, 1997. – P.335-340.
19. Волков А.Е. *Микроструктурное моделирование деформационных процессов в сплавах с памятью формы* / Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. – Санкт-Петербург, 2003. 196 с.
20. Какулия Ю.Б., Шарыгин А.М. *Численное моделирование напряжений и деформаций в толстостенной трубе из материала с памятью формы* // Журнал функциональных материалов. – 2007. – №8. – С.303-313.
21. Волков А.Е., Кухарева А.С. *Моделирование термомеханических соединений труб тонкостенными и толстостенными муфтами из никелида титана* /

- XLVII Международная конференция «Актуальные проблемы прочности». Материалы.– Нижний Новгород, 2008. – Ч.1. – С.54-56.
22. Мовчан А.А. *Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы* // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1994. – №6. – С.47-53.
23. Мовчан А.А. *Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы* // Прикладная механика и техническая физика. – 1995. – Т.36. – №2. – С.173-181.
24. Мовчан А.А. *Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1995. – №1. – С.197-205.
25. Шкутин Л.И. *Анализ осесимметричных фазовых деформаций в пластинах и оболочках* // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т.48. – № 2. – С.163-171.
26. Шкутин Л.И. *Анализ осесимметричных деформаций пластин и оболочек в термоцикле фазовых превращений* // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т.49. – №2. – С.204-210.
27. Шкутин Л.И. *Нелинейные деформации и катастрофы тонких тел.* – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014. – 138 с.
28. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.

REFERENCES

1. *Materialy s efektom pamiati formy: Sprav. Izd. [Materials with shape memory effect]* / Pod. red. Likhacheva V.A., Vol.2, SPb.: Izd-vo NIIKh SPbGU, 1998, 374 p.
2. Movchan A.A. *Consideration of the elastic modulus variability and the effect of stresses on the phase composition in shape memory alloys.* Mechanics of Solids, 1998, Vol.33, No.1, Pp.64-72.
3. Movchan A.A., Tant Zin Aung, Movchan I.A. *Reshenie zadach izgiba balok iz splavov s pamiat'iu formy v ramkakh modeli nelineinogo deformirovaniia etikh materialov pri fazovykh i strukturnykh prevrashcheniiakh [The problem of the bending of beams made of alloys with shape memory in the framework of the model of nonlinear deformation of these materials during phase and structural transformations].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2009, Vol.15, No.3, Pp.422-436.
4. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses.* Mechanics of Solids, 2014, Vol. 49, No.1, Pp.27-39.
5. Movchan A.A. *Torsion of prismatic beams from shape memory alloys.* Mechanics of Solids, 2000, Vol.35, No.6, Pp.119-128.
6. Movchan A.A., Tant Zin Aung. *Analiz raboty pruzhin iz splava s pamiat'iu formy v ramkakh modeli nelineinogo deformirovaniia etikh materialov [Analysis of the work of springs of an alloy with shape memory in the framework of the model of nonlinear deformation of these materials].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2009, Vol.15, No.4, Pp.591-600.
7. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o priamom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamiat'iu formy, nakhodiashchemsia pod deistviem postoiannogo*

- krutiashchego momenta [The solution of the direct martensitic transition in a rod of an alloy with shape memory under the effect of a constant torque]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2014, Vol.20, No.3, Pp.454-468.*
8. Saganov E.B. *Reshenie zadachi ob obratnom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamiat'iu formy, nakhodiashchemsia pod deistviem postoiannogo krutiashchego momenta [The problem on the reverse martensitic transition in a rod of an alloy with shape memory under the effect of a constant torque]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2014, Vol.20, No.4, Pp.454-468.*
 9. Mashikhin A.E. *Zadacha o kontakte tsilindra iz splava s pamiat'iu formy s uprugoi truboi pri obratnom fazovom prevrashchenii [The problem of contact of a cylinder made of an alloy with shape memory with the elastic tube during reverse phase transformation]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2014, Vol.20, No.4, Pp.624-636.*
 10. Movchan A.A., Mashikhin A.E. *Deformatsii krugovogo tsilindra iz splava s pamiat'iu formy pri strukturnom perekhode ili priamom fazovom prevrashchenii [Deformation of the circular cylinder made of an alloy with shape memory during a structural transition, or a direct phase transformation]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2012, Vol.18, №2, Pp.235-247.*
 11. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Zadacha o priamom martensitnom prevrashchenii v tolstostennom tsilindre iz splava s pamiat'iu formy [The problem of direct martensitic transformation in a thick-walled cylinder made of an alloy with shape memory]. Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela, 2016, No.3, Pp.100-114.*
 12. Movchan A.A., Levin A.S. *Zadacha o priamom martensitnom prevrashchenii v tolstostennoi sfere iz splava s pamiat'iu formy, nakhodiashchemsia pod deistviem postoiannogo davleniia [The problem of direct martensitic transformation in a thick-walled sphere made of an alloy with shape memory under the effect of constant pressure]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.2, Pp.221-236.*
 13. Likhachev V.A., Malinin V.G., Shliakhov S.A. *Raschet napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia tolstostennoi truby, izgotovlennoi iz materiala s pamiat'iu formy i ispytyvaiushchei deistvie peremenoj temperatury i davleniia [The calculation of the stress-strain state of thick-walled pipe made of a material with shape memory and under the action of variable temperatures and pressure]. Seminar "Materialy s novymi funktsional'nymi svoistvami", Materialy, Novgorod, Borovichi, 1990, Pp.161-163.*
 14. Likhachev V.A., Malinin V.G., Shliakhov S.A. *Chislennoe modelirovanie evoliutsii napriazhennogo sostoianiia tolstostennogo tsilindra iz materiala, ispytyvaiushchego martensitnye prevrashcheniia pri silovom vozdeistvii [Numerical simulation of the evolution of the stress state of thick-walled cylinder of material experiencing the martensitic transformation during the force impact]. XXV Vsesoiuznyi seminar «Aktual'nye problemy prochnosti», Materialy, Nizhnii Novgorod, 1991, Vol.1, Pp.135-139.*
 15. Volkov A.E., Likhachev V.A., Slutsker Iu.F. *Raschet termomekhanicheskogo soedineniia metodami strukturno-analiticheskoi teorii [Calculation of thermo-mechanical connection methods of the structural-analytical theory]. XXVII Mezhhrespublikanskii seminar «Aktual'nye problemy prochnosti», Materialy, Ukhta, 1992, Pp.31-36.*
 16. Likhachev V.A., Malinin V.G. *Strukturno – analiticheskaiia teoriia prochnosti [The structural – analytical theory of strength]. Sankt-Peterburg, Nauka, 1993, 471 p.*

17. Kuznetsov A.V. *Chislennoe reshenie sviaznoi osesimmetrichnoi zadachi o priamom prevrashchenii dlia splavov s pamiat'iu formy [Numerical solution of the coupled axisymmetric problem of direct transformation for alloys with shape memory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 1996, Vol.3-4, Pp.71-81.
18. Likhachev V.A., Razov A.I., Volkov A.E. *Finite difference simulation of a thermomechanical coupling*. Second Intern. Conf. on Shape Memory and Superelastic Technologies SMST-97, Proceedings, USA, California, Asilomar Conference Center, Pacific Grove, 1997, Pp.335-340.
19. Volkov A.E. *Mikrostrukturnoe modelirovanie deformatsionnykh protsessov v splavakh s pamiat'iu formy [Microstructural modeling of deformation processes in alloys with shape memory]*. Dissertatsiia na soiskanie uchenoi stepeni d.f.-m.n., Sankt-Peterburg, 2003, 196 p.
20. Kakuliia Iu.B., Sharygin A.M. *Chislennoe modelirovanie napriazhenii i deformatsii v tolstostennoi trube iz materiala s pamiat'iu formy [Numerical simulation of stresses and strains in a thick-walled tube of a material with shape memory]*. Zhurnal funktsional'nykh materialov, 2007, No.8, Pp.303-313.
21. Volkov A.E., Kukhareva A.S. *Modelirovanie termomekhanicheskikh soedinenii trub tonkostennymi i tolstostennymi muftami iz nikelida titana [Modeling of thermomechanical pipe connections of thin-walled and thick-walled couplings of titanium nickelide]*. XLVII Mezhdunarodnaia konferentsiia «Aktual'nye problemy prochnosti», Materialy, Nizhnii Novgorod, 2008, Ch.1, Pp.54-56.
22. Movchan A.A. *Mikromekhanicheskie opredel'aiushchie uravneniia dlia splavov s pamiat'iu formy [Micromechanical constitutive equations for alloys with shape memory]*. Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin, 1994, No.6, Pp.47-53.
23. Movchan A.A. *The selection of the phase transition diagram approximation and model of disappearing of martensite crystals for shape memory alloys*. Applied Mechanics and Technical Physics, 1995, Vol.36, No.2, Pp.300-306.
24. Movchan A.A. *Micromechanical description of the deformation due to martensite transformations in shape - memory alloys*. Mechanics of Solids, 1995, Vol.30, No.1, Pp.186-194.
25. Shkutin L.I. *Analysis of axisymmetric phase strains in plates and shells*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2007, Vol.48, No.2, Pp.285-291.
26. Shkutin L.I. *Axisymmetric deformation of plates and shells with phase transformations under thermal cycling*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2008, Vol.49, No.2, Pp.330-335.
27. Shkutin L.I. *Nelineinye deformatsii i katastrofy tonkikh tel [Nonlinear deformation and the disaster of the subtle bodies]*. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN, 2014, 138 p.
28. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Taking into account of the martensite inelasticity in reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.

Поступила в редакцию 20 июня 2016 года.

Сведения об авторе:

Машихин Антон Евгеньевич – асп., Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; e-mail: a--nton@mail.ru