

## РОЛЬ ИНТЕНСИВНОСТИ АДГЕЗИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ЖЕСТКОСТИ МАТРИЦЫ В ПЕРЕДАЧЕ УСИЛИЙ ОТ ЦЕЛЬНОГО ВОЛОКНА К РАЗОРВАННОМУ В ВОЛОКНИСТОМ КОМПОЗИТЕ И В РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЧНОСТИ АРМИРУЮЩИХ ВОЛОКОН. ЧАСТЬ II

Турусов Р.А.<sup>1</sup>, Богачев Е.А.<sup>2</sup>, Елаков А.Б.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ФГБУН Институт химической физики РАН им. Н.Н.Семёнова, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>ОАО «Композит», г. Королёв, Московская обл., Россия

### АННОТАЦИЯ

В работе утверждается, что для решения контактных задач, к которым относятся и рассматриваемые здесь задачи адгезионной механики, наряду с требованиями непрерывности векторов перемещения и напряжения на границе контакта, необходимо вводить количественную характеристику контакта. В качестве такого параметра авторы предлагают интенсивность адгезионного (или контактного) взаимодействия  $G^*/h^*$ , представляющего собой отношение модуля сдвига контактного слоя  $G^*$  к его толщине  $h^*$ . На примере решения конкретных задач о передаче усилия от цельного волокна к разорванному в волокнистом композите авторы демонстрируют определяющее влияние этого параметра на характер распределения нормальных напряжений и концентрацию, а также на величину максимальных касательных напряжений на границе волокно-матрица вблизи места разрыва волокна. Адгезионная прочность является лишь критерием адгезионного разрушения и никак непосредственно не влияет на эффективность передачи усилий. Ранее роль адгезионного взаимодействия практически не исследовалась, поскольку адгезионное взаимодействие в работах различных авторов никак не характеризовалось, а по умолчанию полагалось абсолютным. Напряженно-деформированное состояние адгезионных моделей здесь рассчитывается методом контактного слоя, разрабатываемым Турусовым Р.А. В результате введения ограничений на величину максимальных касательных напряжений удалось получить формулу, объединяющую адгезионную прочность, прочность и диаметр волокна, интенсивность адгезионного взаимодействия волокна с матрицей, а также жесткости волокон и матрицы. По сути, это условия монолитности для волокнистого композита.

**Ключевые слова:** адгезия; волокнистый композит; интенсивность адгезионного взаимодействия; адгезионная прочность; напряжения; деформации; условия монолитности; углерод-углеродный композит

## THE ROLE OF ADHESION INTERACTION AND RIGIDITY OF THE MATRIX OF FIBRE COMPOSITE IN FORCE TRANSMISSION FROM THE INTACT FIBRE TO THE RUPTURED ONE. PART II

Turusov R.A.<sup>1</sup>, Bogachev E.A.<sup>2</sup>, Elakov A.B.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*N.N.Semënov Institute of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*ОАО "Composite", Korolev, Moscow region, Russia*

## ABSTRACT

The paper states that contact problems solution, including the problems of adhesion mechanics discussed below, requires a quantitative characteristic of the contact as well as the continuity requirement for displacement and stress vectors on the contact boundary. As such it is proposed to use so-called '*intensity of adhesive (or contact) interaction*'  $G^*/h^*$ , which is the ratio of contact layer shear modulus  $G^*$  to its thickness  $h^*$ . In the context of solving the problem of force transmission between undamaged and ruptured fibre in a fibre composite it is shown that this parameter is determinative for normal stress distribution and concentration, as well as the maximum of shear stress at the boundary matrix and fibre close to the fibre rupture site. It is preferable that the inefficient length is as small as possible: this gives advantage in strength of both the fibre and the composite. The stress-strain state of adhesive models is determined by the method of contact layer, worked out by prof. R.Turusov. After the restrictions to maximum shear stress value were brought in, a formula, which unites adhesive strength, fibre strength and diameter, intensity of adhesive interaction between fibre and matrix and rigidity of fibre and matrix, was established. Which is, as a matter of fact, the condition of the integrity of fibre composite.

**Keywords:** adhesion; fibre composite; intensity of adhesive interaction; adhesive strength; stresses; deformations; condition of the integrity; carbon-carbon composite

## ВВЕДЕНИЕ

В первой части настоящего исследования [1] была рассмотрена модель передачи усилия от цельного волокна к разорванному для случая, когда передающая усилие матрица остается цельной. Здесь разорваны матрица и волокно. Задача о распределении и концентрации напряжений в такой системе решалась методом контактного слоя [1-6]. Ранее решалась и исследовалась, в основном, задача о передаче усилия от разорванного волокна в матрицу или наоборот [7-11]. С тех пор принципиально нового подхода к подобным исследованиям и описаниям адгезионного взаимодействия не выработано. Граница никак не характеризовалась. Если задаться вопросом, что же такое адгезия, то ответить на него в общем случае можно следующим образом. Это явление или процесс установления некоторых обладающих энергией связей между адгезивом (клеем, матрицей) и субстратом. Допустим, что мы можем регулировать плотность этих связей между поверхностями адгезива и субстрата. Например, при плотности связей  $n_{p1}=10^{14}$  /см<sup>2</sup> это будет означать, что задействован примерно каждый десятый атом поверхности субстрата с противоположащим ему атомом адгезива. Такая среда будет обладать модулем Юнга  $E^*$  вдоль стержней и модулем сдвига  $G^*$ , характеризующим связь между деформацией сдвига в плоскости контакта и напряжением сдвига. Если мы задействуем каждый сотый атом, то плотность связей станет равной примерно  $n_{p2}=10^{12}$ /см<sup>2</sup>. Тогда и модуль Юнга  $E^*$  и модуль сдвига  $G^*$  контактного слоя также уменьшатся на два порядка. Вот таким образом мы можем воздействовать на адгезионное взаимодействие и его интенсивность. Величина этого взаимодействия может меняться в диапазоне нескольких порядков. В используемом здесь методе контактного слоя предполагается, что силовой контакт между матрицей и волокном осуществляется посредством коротких упругих стерженьков, моделирующих адгезионную связь. Плотность этих связей, как уже говорилось, невелика по сравнению с плотностью атомов или молекул на поверхности взаимодействия адгезива с субстратом. Поэтому такие стерженьки

не касаются друг друга, и в таком анизотропном слое отсутствуют напряжения, перпендикулярные их боковой поверхности. Этот слой назван контактным. Такой подход позволяет решать задачу Коши, т.е. удовлетворять исходным уравнениям и всем граничным условиям, но требует дополнительно характеризовать контакт адгезива с субстратом наряду с обязательными условиями непрерывности векторов напряжений и перемещений. Обычно в случае решения контактных задач считают достаточными выполнения этих условий. В результате такого «точного» решения задачи теории упругости в угловых точках контакта получаются бесконечные величины касательных напряжений – сингулярности. И тогда применение физически ясных критериев разрушения адгезионных моделей становится невозможным. Кроме того, в этом случае краевые условия не удовлетворены, ибо как раз в этих местах касательные напряжения равны нулю. Это значит, что в отличие от используемого здесь метода контактного слоя, задача Коши не решается. Предлагаемый здесь метод позволяет решать задачу Коши и во многих случаях получать решения для концентрации напряжений в замкнутом виде. Позволяет он и упрощенные подходы, в результате которых получаются физически ясные и приемлемые результаты. Это, прежде всего, относится к одномерным задачам. Получаемые в них результаты численно отличаются от точных (например, двухмерных) решений задач Коши не более 10% [2,6]. Вследствие решения задачи в первой части настоящей работы авторы пришли к выводу о необходимости характеристики контакта адгезив – субстрат. В качестве такой характеристики предлагается величина отношения модуля сдвига  $G^*$  контактного слоя к его толщине  $h^*$ , т.е.  $G^*/h^*$ . В работе она названа *интенсивностью адгезионного взаимодействия*, ибо напрямую связана с плотностью адгезионных связей и их длиной. Это отношение возникает в решении методом контактного слоя всех одномерных задач адгезионной механики, включая рассматриваемую здесь задачу. Модуль Юнга такой среды вдоль связей связан простым соотношением с модулем сдвига  $E^*=2G^*$ .

В этой части работы продолжено исследование передачи усилия от цельного к разорванному волокну, но для случая, когда в этом же месте разорвана матрица (рис.1, 2).

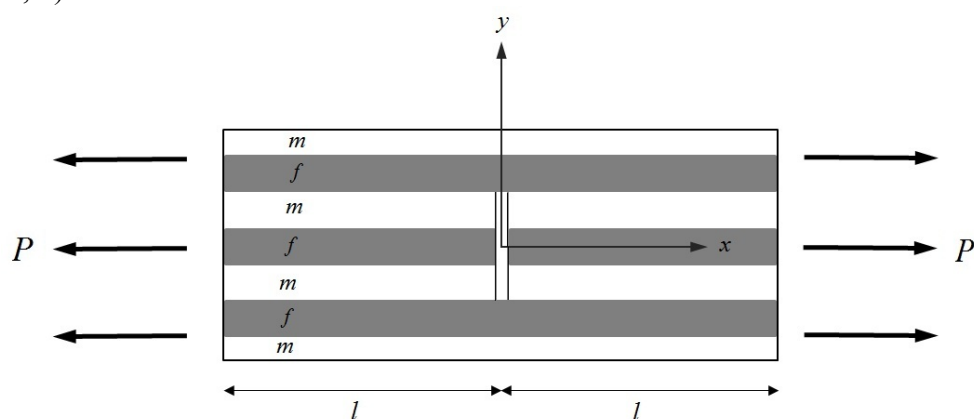


Рис.1. Модель 2. Разорвано центральное волокно и слой матрицы, прилегающий к нему.

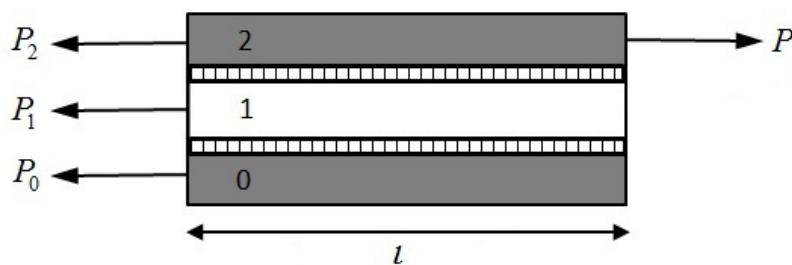


Рис.2. Модель 2. Плоская одномерная модель для расчёта напряженно-деформированного состояния ситуации на рис.1. Разорвано волокно 0 и матрица 1. На модели – разрыв справа ( $x=l$ ), где нагрузка отсутствует. Волокно 2 остаётся цельным. Заштрихованы контактные слои.

### 1. МОДЕЛЬ 2 С РАЗОРВАННЫМИ ВОЛОКНОМ И МАТРИЦЕЙ

Эта модель и ее решение отличается от предыдущей модели 1 только граничными условиями. Они достаточно легко определяются из условия совместности работы всех слоёв 0, 1 и 2 (см.рис.1 и 2). Запишем их: при  $x = -l$  они такие же, как и в первой задаче, т.е.

$$x = -l: \left. \begin{aligned} N_0 &= \frac{P_0^*}{b} = \frac{\sigma_0^* S_0}{b} = \frac{P}{b} \frac{E_0 S_0}{E_0 S_0 + E_1 S_1 + E_2 S_2} = \frac{P}{b} \frac{E_0 h_0}{E_0 h_0 + E_1 h_1 + E_2 h_2} \\ N_1 &= \frac{P_1^*}{b} = \frac{\sigma_1^* S_1}{b} = \frac{P}{b} \frac{E_1 S_1}{E_0 S_0 + E_1 S_1 + E_2 S_2} = \frac{P}{b} \frac{E_1 h_1}{E_0 h_0 + E_1 h_1 + E_2 h_2} \\ N_2 &= \frac{P_2^*}{b} = \frac{\sigma_2^* S_2}{b} = \frac{P}{b} \frac{E_2 S_2}{E_0 S_0 + E_1 S_1 + E_2 S_2} = \frac{P}{b} \frac{E_2 h_2}{E_0 h_0 + E_1 h_1 + E_2 h_2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Граничные условия для другого конца, где разорваны слои 0 и 1 несколько иные

$$x = l: N_0 = 0, N_1 = 0, N_2 = \frac{P}{b} \quad (2)$$

Граничные условия для функций  $\varphi$  и  $f$

$$x = -l: \left. \begin{aligned} \varphi &= N_0 + N_2 = \frac{P}{b} \frac{E_0 h_0 + E_2 h_2}{E_0 h_0 + E_1 h_1 + E_2 h_2} \\ f &= N_0 - N_2 = \frac{P}{b} \frac{E_0 h_0 - E_2 h_2}{E_0 h_0 + E_1 h_1 + E_2 h_2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$x = l: \left. \begin{aligned} \varphi &= N_0 + N_2 = 0 + N_2 = \frac{P}{b}; \\ f &= N_0 - N_2 = 0 - N_2 = -\frac{P}{b} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Поскольку исходные уравнения остаются прежними, используя тот же ход решения, что и в первой задаче, но с новыми граничными условиями (1)-(4), получаем

$$\varphi(x) = \frac{P}{2b(d_1 + 2d_0)} \left\{ d_1 \left[ \frac{sh\omega_1 x}{sh\omega_1 l} + \frac{sh\omega_1 x}{sh\omega_1 l} \right] + 4d_0 \right\}$$

$$f(x) = -\frac{P}{2b} \left[ \frac{sh\omega_2 x}{sh\omega_2 l} + \frac{sh\omega_2 x}{sh\omega_2 l} \right] \quad (5)$$

Зная функции  $\varphi(x)$  и  $f(x)$ , можно определить искомые приведенные силы и напряжения

$$\begin{aligned} \sigma'_0(x) &= \sigma_0(x) \frac{b}{P} = \frac{\varphi(x) + f(x)}{2h_0} \frac{b}{P} = \\ &= \frac{I}{4h_0} \left\{ \frac{1}{(d_1 + 2d_0)} \left[ d_1 \left[ \frac{sh\omega_1 x}{sh\omega_1 l} + \frac{sh\omega_1 x}{sh\omega_1 l} \right] + 4d_0 \right] - \left[ \frac{sh\omega_2 x}{sh\omega_2 l} + \frac{sh\omega_2 x}{sh\omega_2 l} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_2(x) &= \sigma_2(x) \frac{b}{P} = \frac{\varphi(x) - f(x)}{2h_0} \frac{b}{P} = \\ &= \frac{I}{4h_0} \left\{ \frac{1}{(d_1 + 2d_0)} \left[ d_1 \left[ \frac{sh\omega_1 x}{sh\omega_1 l} + \frac{sh\omega_1 x}{sh\omega_1 l} \right] + 4d_0 \right] + \left[ \frac{sh\omega_2 x}{sh\omega_2 l} + \frac{sh\omega_2 x}{sh\omega_2 l} \right] \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_1(x) &= \sigma_1(x) \frac{b}{P} = \frac{1}{2h_1} \left( 2 - \varphi \frac{2b}{P} \right) = \\ &= \frac{I}{2h_1} \left\{ 2 - \frac{1}{(d_1 + 2d_0)} \left[ 4d_0 + d_1 \left[ \frac{sh\omega_1 x}{sh\omega_1 l} + \frac{sh\omega_1 x}{sh\omega_1 l} \right] \right] \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tau'_1 &= \tau_1(x) \frac{b}{P} = -\frac{dN_0}{dx} \frac{b}{P} = \frac{d(\varphi + f)}{dx} \frac{b}{P} = -\frac{h_0}{4} \frac{d\sigma_{x0}}{dx} = \\ &= \frac{I}{4} \left[ -\omega_1 \frac{d_1}{(2d_0 + d_1)} \left( \frac{ch(\omega_1 x)}{sh(\omega_1 l)} + \frac{sh(\omega_1 x)}{ch(\omega_1 l)} \right) + \omega_2 \left[ \frac{ch(\omega_2 x)}{sh(\omega_2 l)} + \frac{sh(\omega_2 x)}{ch(\omega_2 l)} \right] \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tau'_2 &= \tau_2(x) \frac{b}{P} = \frac{dN_2}{dx} \frac{b}{P} = \frac{d(\varphi - f)}{dx} \frac{b}{P} = \frac{h_2}{4} \frac{d\sigma_{x2}}{dx} = \\ &= \frac{I}{4} \left[ \omega_1 \frac{d_1}{(2d_0 + d_1)} \left( \frac{ch(\omega_1 x)}{sh(\omega_1 l)} + \frac{sh(\omega_1 x)}{ch(\omega_1 l)} \right) + \omega_2 \left[ \frac{ch(\omega_2 x)}{sh(\omega_2 l)} + \frac{sh(\omega_2 x)}{ch(\omega_2 l)} \right] \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Результаты расчетов напряженного состояния модели с разорванным волокном и матрицей по формулам (6)-(10) представлены на рис.3-5.

Краевые условия для приведенных нормальных напряжений в Модели 2

$$\begin{aligned} \sigma'_0(l) &= 0; \quad \sigma'_0(-l) = \frac{E_0 h_0}{2E_0 h_0 + E_1 h_1}; \quad \sigma'_1(l) = 0; \quad \sigma'_1(-l) = \frac{E_1 h_1}{2E_0 h_0 + E_1 h_1}; \\ \sigma'_2(l) &= \frac{1}{h_0}; \quad \sigma'_2(-l) = \frac{E_0 h_0}{2E_0 h_0 + E_1 h_1} \end{aligned} \quad (11)$$

Краевые условия для приведенных касательных напряжений (размерность  $l/m$ ) в Модели 2 при  $x=l$ , т.е. вблизи места разрыва волокна 0

$$\begin{aligned} \tau'_{1,2}(l) &= \frac{1}{2} \left[ -\omega_1 \frac{d_1}{(2d_0 + d_1)} + \omega_2 \right] = \frac{\omega_2}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{E_1 h_1}{2E_0 h_0 + E_1 h_1}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G^*}{h^*} \frac{1}{E_0 h_0}} \left( 1 - \sqrt{\frac{E_1 h_1}{2E_0 h_0 + E_1 h_1}} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tau'_{2,2}(l) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G^*}{h^*} \frac{1}{E_0 h_0}} \left( 1 + \sqrt{\frac{E_1 h_1}{2E_0 h_0 + E_1 h_1}} \right)$$

Оценим границы изменения этих функций при изменении параметров жесткости.

1. Жесткость матрицы много меньше жесткости волокон:  $E_0 h_0 \gg E_1 h_1$ , тогда

$$\tau'_{1,2}(l) = \frac{\omega_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G^*}{h^*} \frac{1}{E_0 h_0}}; \quad \tau'_{2,2}(l) = \frac{\omega_2}{2}$$

2. Если  $E_0 h_0 = E_1 h_1$ , тогда

$$\tau'_{1,2}(l) = \frac{\omega_2}{4} \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} \right); \quad \tau'_{2,1}(l) = \frac{\omega_2}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \tag{13}$$

3. Если  $E_0 h_0 \ll E_1 h_1$ , тогда

$$\tau'_{1,2}(l) = \frac{1}{2E_1 h_1} \sqrt{\frac{G^*}{h^*} E_0 h_0}; \quad \tau'_{2,2}(l) = \omega_2 = \sqrt{\frac{G^*}{h^*} \frac{1}{E_0 h_0}}$$

Напомним, что здесь исследуется модель с одинаковыми по физико-механическим свойствам волокнами 0 и 2.

## 2. МОДЕЛЬ 2. РАЗОРВАНЫ ВОЛОКНО 0 И МАТРИЦА 1

Сопоставим с аналогичными результатами, полученными в первой части настоящего исследования [1] для случая, когда матрица остается цельной (см. рис.4). Особых различий в величинах и в ширине краевого эффекта нормальных напряжений не заметно. Для матрицы иные краевые условия. Но разорванная матрица и здесь быстрее нагружается, нежели разорванное волокно 0. Т.е. краевой эффект уже у матрицы по сравнению с волокнами. Сравните рис.3 и 4.

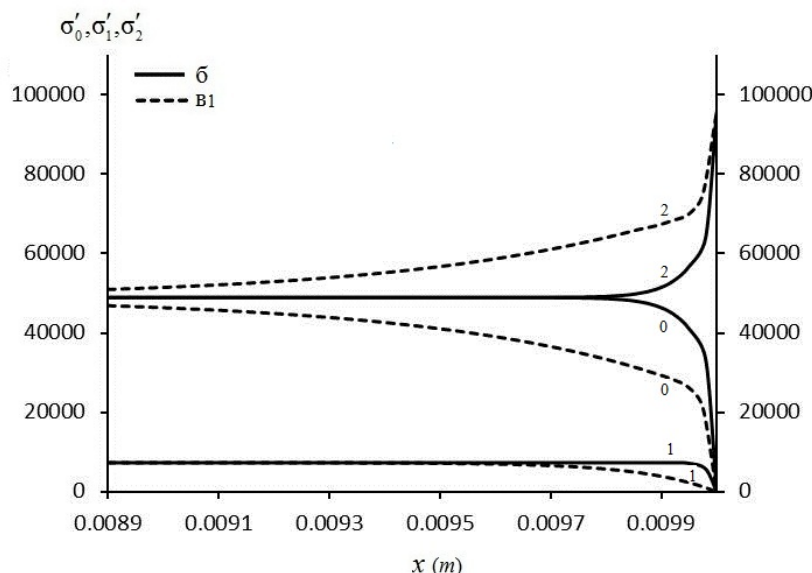


Рис.3. Модель 2. Разорвано волокно 0 и матрица 1. Распределение приведённых нормальных напряжений вблизи места разрыва. Сплошные кривые – базовый вариант, где интенсивность адгезионного взаимодействия  $G^*/h^* = 25 \cdot 10^6$  МПа/м. Штриховые кривые – вариант 1, где  $G^*/h^* = 25 \cdot 10^5$  МПа/м, т.е. на порядок ниже.

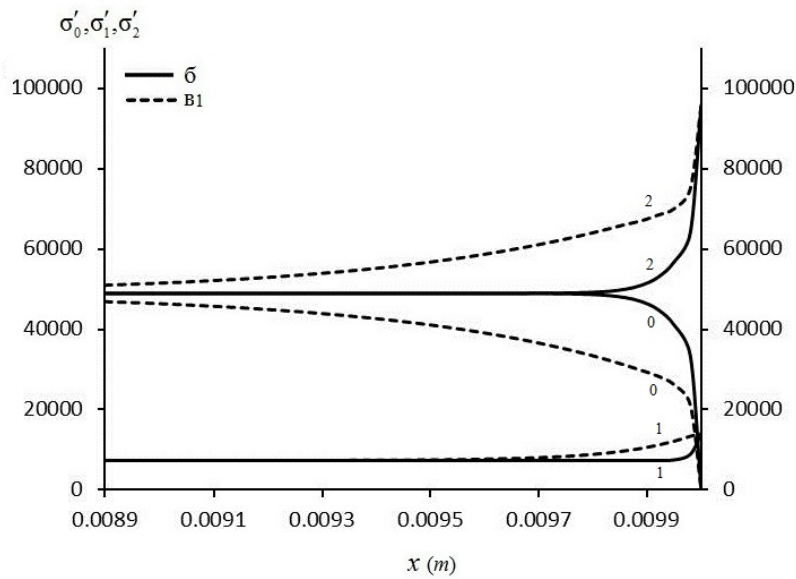


Рис.4. Модель 1. Разорвано волокно 0. Волокно 2 и матрица 1- целые. Распределение по длине нормальных напряжений в элементах системы вблизи места разрыва волокна 0. Сплошная кривая – базовый вариант, где интенсивность адгезионного взаимодействия  $G^*/h^* = 25 \cdot 10^6$  МПа/м и модуль Юнга волокон  $E_0 = E_2 \cong E_{стекла} = 2 \cdot 10^4$  МПа . Штриховая кривая – вариант 1, в котором  $G^*/h^* = 25 \cdot 10^5$  МПа/м .

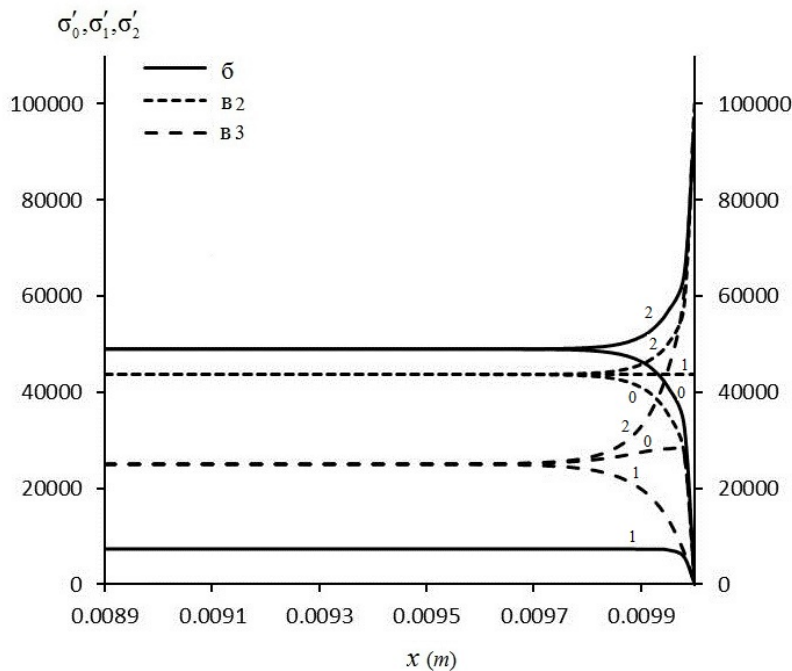


Рис.5. Модель 2. Разорвано волокно 0 и матрица 1, волокно 2 – целое. Распределение приведённых нормальных напряжений вблизи места разрыва. Сплошные кривые – базовый вариант. Пунктирные кривые – вариант 2, модуль Юнга матрицы равен модулю Юнга волокон. Штриховые кривые – вариант 3, по сравнению с вариантом 2 увеличена толщина матрицы до  $2 \cdot 10^{-5}$  м=20 мкм .

На рис.5 кривые призваны отражать влияние жесткости матрицы на краевой эффект. Как выяснилось, даже в случае, когда жесткости матрицы и волокна одинаковы краевой эффект для нормальных напряжений остается неизменным как для модели 2, что на рис.5, так и для модели 1 из первой части.

Теперь сравним касательные напряжения в этих двух моделях.

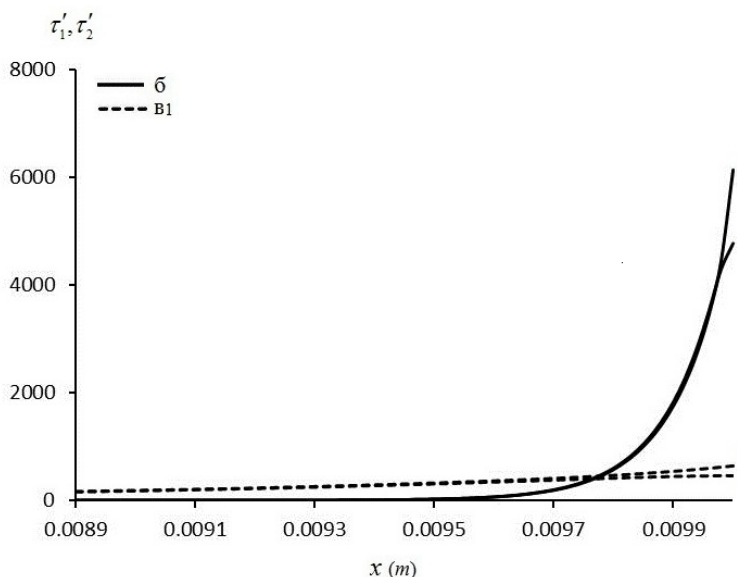


Рис.6. Модель 2. Распределение приведённых касательных напряжений по длине границы вблизи места разрыва волокна 0. Сплошная кривая – базовый вариант, где интенсивность адгезионного взаимодействия  $G^*/h^* = 25 \cdot 10^6$  МПа/м и модуль Юнга волокон  $E_0 = E_2 \cong E_{\text{стекла}} = 2 \cdot 10^4$  МПа. Пунктирная кривая – вариант 1, в котором  $G^*/h^* = 25 \cdot 10^5$  МПа/м. Кривые 1 – касательные напряжения на границе волокно 0 – матрица 1, кривые 2 – касательные напряжения на границе волокно 2 – матрица 1.

Как видно из рис.3 и 4 нет существенных качественных различий этих результатов для модели 2 от результатов модели 1. Отличаются лишь кривые распределения нормальных напряжений в матрице 1. Это естественно, ибо матрица здесь претерпела разрыв одновременно с волокном 0 и справа напряжения в матрице равны нулю.

Далее на рис.3-5 для наглядности приведены в сравнении с базовым вариантом (сплошные кривые) кривые распределения нормальных и касательных напряжений в краевом эффекте, отличающиеся от базового повышенным модулем Юнга матрицы (штриховые кривые). Из них видно, что и при ярко выраженном краевом эффекте более жёсткая матрица не вносит качественных изменений в краевой эффект. И отличается лишь тем, что более жесткая матрица берёт на себя и большую нагрузку (штриховые кривые на рис.3 и 4).

Здесь следует отметить, что в отличие от модели 1 максимальные касательные напряжения  $\tau'_1$  (рис.6) между разорванным волокном и разорванной матрицей в обоих вариантах меньше (кривые 1), чем максимальные касательные напряжения  $\tau'_2$  между цельным волокном и разорванной матрицей (кривые 2). При этом, чем выше жесткость матрицы, тем выше максимальные значения



касательных напряжений  $\tau'_2$  в слое, передающем усилия от цельного (загруженного) волокна к разорванной матрице. Об этом свидетельствуют кривые 2 сплошная и штриховая. И всё наоборот с касательными напряжениями  $\tau'_1$ , передающими усилия от матрицы к разорванному волокну (кривые 1) – чем жёстче матрица, тем ниже максимумы этих напряжений. Но в целом максимальные касательные напряжения в модели 2 больше таковых в модели 1. Это влияние разрыва матрицы.

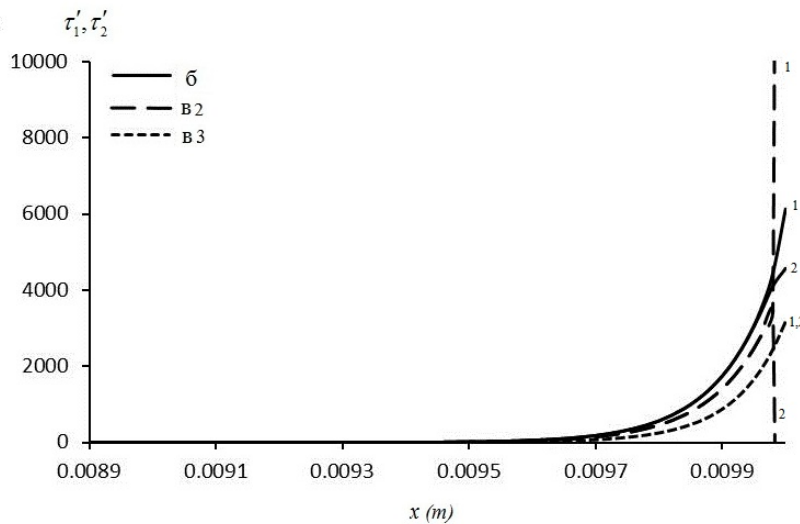


Рис.7. Модель 1. Распределение приведённых касательных напряжений по длине границы вблизи места разрыва волокна 0. Сплошная кривая – базовый вариант, где интенсивность адгезионного взаимодействия  $G^*/h^* = 25 \cdot 10^6$  МПа/м и модуль Юнга волокон  $E_0 = E_2 \cong E_{стекла} = 2 \cdot 10^4$  МПа. Пунктирная кривая – вариант 2, модуль Юнга матрицы равен модулю Юнга волокон. Штриховая кривая – вариант 3, по сравнению с вариантом 2 увеличена толщина матрицы до  $2 \cdot 10^{-5}$  м = 20 мкм. Кривые 1 – касательные напряжения на границе волокно 0 – матрица 1, кривые 2 – касательные напряжения на границе волокно 2 – матрица 1.

Стоит обратить внимание на вертикальные штриховые прямые (рис.7), обозначенные внизу 2, аверху 1. Это означает, что касательные напряжения на границе матрица – волокно равны нулю. Это случай когда жесткость матрицы много больше жесткости волокна (вариант 3). Краевой эффект для касательных напряжений отсутствует. Это же следует из формул (13) – модель 2 и (14) – модель 1, когда  $E_1 h_1$  много больше  $E_0 h_0$ , т.е. жесткости волокна.

Краевые условия для приведенных касательных напряжений (размерность  $1/m$ ) в модели 1 при  $x=l$ , т.е. вблизи места разрыва волокна 0.

$$\begin{aligned}\tau'_{1,1}(l) &= \frac{2d_0}{4(d_0 + d_1)} \left[ \omega_1 \frac{d_1}{(2d_0 + d_1)} + \omega_2 \right] = \frac{E_0 h_0}{E_0 h_0 + E_1 h_1} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G^*}{h^*} \frac{1}{E_0 h_0}} \left( 1 + \sqrt{\frac{E_1 h_1}{2E_0 h_0 + E_1 h_1}} \right); \\ \tau'_{2,1}(l) &= \frac{E_0 h_0}{E_0 h_0 + E_1 h_1} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G^*}{h^*} \frac{1}{E_0 h_0}} \left( 1 - \sqrt{\frac{E_1 h_1}{2E_0 h_0 + E_1 h_1}} \right)\end{aligned}\quad (14)$$

Если в формулах (13) или (14) для максимальных касательных напряжений на границе волокно – матрица потребовать, чтобы максимальные касательные напряжения были меньше либо равны прочности адгезионной связи на сдвиг  $\tau_{ad}$

$$\tau_{\max} \leq \tau_{ad} \quad (15)$$

то после несложных преобразований можно получить

$$\frac{P}{b} = \sigma_f (2h_f + h_m) \left( v_f + \frac{E_m}{E_f} v_m \right) \cong 2\sigma_f D_f \left( 1 + \frac{v_m}{v_f} \right) \left( v_f + \frac{E_m}{E_f} v_m \right) \quad (16)$$

Здесь индексами  $f$  и  $m$  внизу обозначена принадлежность величин к волокну и матрице соответственно;  $v_m$  и  $v_f$  относительные объемные содержания матрицы и волокна;  $D_f$  – диаметр волокна. После подстановки средней прочности волокна  $\sigma_b$  вместо  $\sigma_f$  в (16) из него получаем соотношение, связывающее прочность волокна, прочность адгезионной связи, жесткости волокон и матрицы, а также интенсивность адгезионного взаимодействия

$$\tau_{ad} \geq 2\sigma_b \left( 1 + \frac{v_m}{v_f} \right) \left( v_f + \frac{E_m}{E_f} v_m \right) \frac{E_f v_f}{(E_f v_f + 2E_m v_m)} \sqrt{\frac{G^* D_f}{h^* E_f}} \left( 1 + \sqrt{\frac{E_m v_m}{2E_f v_f + E_m v_m}} \right) \quad (17)$$

Соотношение (17) может быть упрощено для разных соотношений параметров композита.

## ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе рассмотрены обе ситуации передачи усилий от цельного волокна к разорванному – когда окружающая матрица остается цельной и когда она претерпевает разрыв заодно с рвущимся армирующим волокном. Серьезных принципиальных различий для обоих случаев в механике волокнистого композита, практически не наблюдается.

В заключение следует отметить, что при решении задач механики адгезионных соединений обычно авторы ограничиваются удовлетворением требований на границе адгезив – субстрат непрерывности векторов перемещений и напряжений, считая адгезионное взаимодействие абсолютным. Здесь указывается на необходимость введения дополнительного параметра, количественно характеризующего качество адгезионного контакта – интенсивность адгезионного взаимодействия адгезива с субстратом. Основным результатом применения предлагаемого подхода в работе явилось получение формулы (17), отражающей взаимосвязь адгезионных, упругих, прочностных и геометрических параметров и дающей возможность реализовать прочность волокна в композите. Эта формула является иным выражением условий монолитности для волокнистого композита, по сравнению, например, с предлагаемыми А.Л.Рабиновичем [7] условиями монолитности.

У углерод-углеродных композитов модуль Юнга матрицы может оказаться больше модуля Юнга армирующих волокон. Это может привести к некоторым

особенностям на границе волокно – матрица. Однако подобная ситуация, как уже говорилось, нуждается в дополнительных специальных исследованиях.

Следует отметить, что здесь рассмотрена плоская модель с двумя волокнами. Однако она позволяет получить наглядное представление о передаче усилий от цельного волокна к разорванному. Она же позволяет сделать некоторые обобщения, например, в виде формулы (17). Модель о взаимодействии со многими волокнами будет рассмотрена отдельно, а результаты сопоставлены с настоящими.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Турусов Р.А., Богачев Е.А., Елаков А.Б. *Роль интенсивности адгезионного взаимодействия и жесткости матрицы в передаче усилий от цельного волокна к разорванному в волокнистом композите и в реализации прочности армирующих волокон. Часть I* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №3. – С.430-451.
2. Freydin A.S., Turusov R.A. *Properties and Calculation of Adhesive Joints* [in Russian]. – Moscow: Khimiya, 1990. – 255 p.
3. Turusov R.A. *Elastic and temperature behavior of a layered structure. Part I. Experiment and theory* // Mechanics of Composite Materials. – 2014. – Vol.50. – No.6. – Pp.1119-1130.
4. Turusov R.A. *Elastic and temperature behavior of a layered structure. Part II. Calculation results* // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol.51. – No.1. – Pp.175-183.
5. Turusov R.A., Manevich L.I. *Contact layer method in adhesive mechanics* // Polymer Science. Series D. – 2010. – Vol.3. – No.1. – Pp.11-19.
6. Turusov R.A. *Adhesion Mechanics* [in Russian]. – Moscow: MGSU, 2015. – 230 p.
7. Rabinovich A.L. *Introduction into the Mechanics of Reinforced Polymers* [in Russian]. – Moscow: Nauka, 1970. – 482 p.
8. Маневич Л.И., Павленко А.В. *Об учете структурной неоднородности композита при оценке адгезионной прочности* // Прикл. мех. и техн. физика. СО АН СССР. – 1982. – №3 (133). – С.140-145.
9. Turazyan A.V., Rabinovich A.L. // Dokl. AN SSSR. – 1970. – Vol.194. – №6. – Pp.1305–1307.
10. Hayashi T. *Photoelastische Untersuchungen der spannungs-verteilung in der durch fasern verstärkten platte.* – Nonhomogeneity and Plasticity. – New York: Hill. Book, 1959. 220 p.
11. Rosen B.W. *Strength of uniaxial fibrous composites* / In: Mechanics of Composite Materials. Pergamon Press, 1970. – 694 p.

## REFERENCES

1. Turusov R.A., Bogachev E.A., Elakov A.B. *Rol intensivnosti adhesionnogo vzaimodeistviya I zhestkosti matritsy v peredache usilii ot tselnogo volokna k razorvannomu v voloknistom kompozite i v realizatsii prochnosti armiruyuschikh volokon.* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2016, Vol.22, No.3, Pp.430-451.
2. Freydin A.S., Turusov R.A. *Svoistva I raschet adgezionnikh soedinenii.* Moskva: Khimiya, 1990, 255 p.

3. Turusov R.A. *Elastic and temperature behavior of a layered structure. Part I. Experiment and theory.* Mechanics of Composite Materials, 2014, Vol.50, No.6, Pp.1119-1130.
4. Turusov R.A. *Elastic and temperature behavior of a layered structure. Part II. Calculation results.* Mechanics of Composite Materials, 2015, Vol.51, No.1, Pp.175-183.
5. Turusov R.A., Manevich L.I. *Contact layer method in adhesive mechanics.* Polymer Science, Series D, 2010, Vol.3, No.1, Pp.11-19.
6. Turusov R.A. *Adgezionnaya mekhanika*, Moskva: MGSU, 2015, 230 p.
7. Rabinovich A.L. *Vvedenie v mekhaniku armirovannikh polimerov.* Moskva: Nauka, 1970, 482 p.
8. Manevich L.I., Pavlenko A.V. *Ob uchete strukturnoy neodnorodnosti kompozita pri otsenke adgezionnoi prochnosti.* Prikl.mekh. I tekhn. Fizika, SO AN SSSR, 1982, No.3(133), Pp.140-145.
9. Turazyan A.V., Rabinovich A.L. *O raspredelenii napryazhenii v elementarnoy modeli odnonapravlennoy strukturi.* Dokl. AN SSSR, 1970. Vol.194, No.6, Pp.1305-1307.
10. Hayachi T. *Photoelastsche untersuchungen der spannungs-verteilung in der durch fasern verstärkten platte.* Nonhomogeneity and Plasticity. New York: Hill. Book, 1959, 220 p.
11. Rosen B.W. *Strength of uniaxial fibrous composites.* In: Mechanics of Composite Materials, Pergamon Press, 1970, 694 p.

Поступила в редакцию 21 марта 2016 года.

---

Сведения об авторах:

Турусов Роберт Алексеевич – д.ф.-м.н., гл.н.с., Отдел композиционных материалов, ФГБУН Институт химической физики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [rob-turusov@yandex.ru](mailto:rob-turusov@yandex.ru)  
Богачев Евгений Акимович – к.т.н., нач. отделения, ОАО "Композит", г. Королёв Московской обл., Россия  
Елаков Александр Борисович – с.н.с., ОАО "Композит", г. Королёв Московской обл., Россия