

## **РОЛЬ ИНТЕНСИВНОСТИ АДГЕЗИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ЖЕСТКОСТИ МАТРИЦЫ В ПЕРЕДАЧЕ УСИЛИЙ ОТ ЦЕЛЬНОГО ВОЛОКНА К РАЗОРВАННОМУ В ВОЛОКНИСТОМ КОМПОЗИТЕ И В РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЧНОСТИ АРМИРУЮЩИХ ВОЛОКОН. Часть I.**

Турусов Р.А.<sup>1</sup>, Богачев Е.А.<sup>2</sup>, Елаков А.Б.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт химической физики РАН им. Н.Н.Семёнова, г. Москва, Россия*

<sup>2</sup>*ОАО «Композит», г. Королёв, Московская обл., Россия*

### **АННОТАЦИЯ**

Любой волокнистый композит, в том числе композит на основе штапельных волокон разной длины, нуждается в исследовании передачи усилий от цельного к соседнему разорвавшемуся или разорванному волокну. В настоящем сообщении, представляющем первую часть настоящей работы, методом контактного слоя решается задача о передаче усилия от цельного волокна к разорвавшемуся для ситуации, когда разорвалось только волокно, но матрица осталась цельной. Случай, когда вместе с волокном рвется матрица, будет представлен во втором сообщении. Авторы в работе предлагают ввести понятие «интенсивности адгезионного взаимодействия» наряду с общепринятой прочностью адгезионной связи. Здесь, выясняется влияние величины (модуля) интенсивности адгезионного взаимодействия на известную в научной литературе по композитам «неэффективную» длину разрушенного волокна и на величину максимальных касательных напряжений. Ранее роль адгезионного взаимодействия не исследовалась, поскольку адгезионное взаимодействие в работах различных авторов никак не характеризовалось, а по умолчанию полагалось абсолютным. Напряженно-деформированное состояние адгезионных моделей здесь рассчитывается методом контактного слоя, разрабатываемым Турусовым Р.А. В качестве характеристики интенсивности адгезионного взаимодействия авторы используют жесткость контактного слоя, представляющего собой отношение модуля сдвига контактного слоя к его толщине. Показано, что влияние интенсивности адгезионного взаимодействия в передаче усилия от цельного к разорванному волокну является определяющим. Чем выше интенсивность адгезионного взаимодействия, тем уже зона концентрации нормальных и касательных напряжений вблизи места разрыва волокна, но и выше максимум касательных напряжений на границе матрицы с волокном. Адгезионная прочность является лишь критерием адгезионного разрушения и никак непосредственно не влияет на эффективность передачи усилий.

**Ключевые слова:** адгезия; интенсивность адгезионного взаимодействия; волокно; матрица; адгезионная прочность; углерод-углеродный композит; оксипан

## **THE ROLE OF ADHESION INTERACTION AND RIGIDITY OF THE MATRIX OF FIBRE COMPOSITE IN FORCE TRANSMISSION FROM THE INTACT FIBRE TO THE RUPTURED ONE**

Turusov R.A.<sup>1</sup>, Bogachev E.A.<sup>2</sup>, Elakov A.B.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Semenov Institute of Chemical Physics, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*OJSC 'Composite', Korolev, Moscow region, Russia*

## ABSTRACT

In every fibre composite, including that based on staple fibres of different length, force transmission from undamaged fibre to a neighboring separated or ruptured one is the area that requires further investigation. In the present paper a problem of force transmission between undamaged and ruptured fibre is resolved with contact layer method for 2 situations:

1. When the fibre is damaged, but the matrix remains intact;
2. When the matrix is damaged as well as the fibre.

The authors coin the term '*intensity of adhesive interaction*' and elucidate the role of this intensity as well as the rigidity of the matrix in the 'velocity' of stress applied to the ruptured fibre. In other words, the influence of *the absolute magnitude (modulus) of the intensity of adhesive interaction* on so called 'inefficient' length of the destroyed fibre (term well known in research literature on composite materials). It is preferable that the inefficient length is as small as possible: this gives advantage in strength of both the fibre and the composite. The stress-strain state of adhesive models is determined by the method of contact layer, worked out by prof. R.Turusov. Rigidity of the contact layer, which is the ratio of its shear modulus to its thickness, is used by the authors as a characteristic of the '*intensity of adhesive interaction*'. It is shown that the influence of the intensity of adhesive interaction is determinative for force transmission from the intact fibre to the ruptured one. The higher the intensity of adhesive interaction, the more narrow is the stress concentration zone next to fibre breaking and the more narrow is the maximum of normal stress in the fibre, and the higher and more narrow is the maximum of shear stress at the boundary of matrix and fibre. The role of Young's modulus (i.e. rigidity) of the matrix is far less considerable. Although it undertakes a good proportion of stress in some carbon-carbon composites where the rigidity of the matrix is comparable with the rigidity of the fibres. In this case its breakage can be dangerous no fewer than the breakage of the reinforcing fibre. Adhesive strength is just a criterion of adhesive failure and does not influence the efficiency of force transmission directly.

**Keywords:** adhesion; the intensity of the adhesive interaction; fiber; matrix; adhesion strength; carbon-carbon composite; oxipane

## ВВЕДЕНИЕ

Цель создания любого композита – получение нового качества или совокупности новых специальных свойств. Часто вопрос сводится к более узкой проблеме: как реализовать (или эффективно использовать) те или иные *заранее известные* свойства компонент, которые часто невозможно реализовать вне композита. Это относится и ко всем волокнистым композитам, независимо от того, ориентированы в нем практически бесконечные волокна, или же это нетканый композит на основе ориентированных случайным образом штапельных волокон. Для композитов с полимерной матрицей вопрос сводится к реализации известных высоких прочностных и жесткостных (упругих) свойств армирующих волокон. С точки зрения структурных исследований вопросы реализации этих характеристик сводятся к проблеме адгезионного взаимодействия матрицы с волокном и к вопросу передачи усилий от цельного волокна к претерпевшему разрыв соседнему волокну. Для композитов на основе штапельных волокон добавляется вопрос эффективной длины волокон. Он, в свою очередь, сводится опять к вопросу исследования длины зоны краевого эффекта для нормальных напряжений в компонентах и касательных напряжений на границе матрица – волокно [1]. В этом направлении многое сделано и получено вплоть до формулировки так называемых условий монолитности [4]. Эти условия представляют собой совокупность требований, предъявляемых к *матрице*

и адгезионной прочности с точки зрения максимальной реализации высоких прочностных свойств готовых армирующих волокон. Но есть такие материалы, как углерод-углеродные волокнистые композиты, получаемые по нетканой чесальной или бумажной технологии из рубленых (штапельных) волокон оксипана (окисленного полиакрилонитрила) [1]. В процессе термообработки волокна превращаются в углеродные, образуя при этом вследствие иглопробивания непрерывный пористый практически ортотропный каркас, который затем многократно пропитывается пеком. А потом все подвергается вновь высокотемпературной обработке. Пек превращается в углеродную матрицу, создавая углерод-углеродный композит. Таким образом, получается композит, конечные физико-механические свойства которого могут быть измерены, но свойства компонент в композите неизвестны. В результате управление конечными свойствами такого композита затруднительно. Можно предположить, что, проведя волокна оксипана вне композита через ту же термообработку, что и в составе каркаса и, в последующем – композита, получатся примерно такие же и с теми же свойствами волокна, что и в композите. Однако остается вне экспериментального моделирования взаимодействие волокна с пеком, переходящим в углерод. Остаются в распоряжении исследователей методы, связанные с препарированием готового композита, а также математическое моделирование технологических процессов, структуры и совместного механического поведения волокон и матрицы. А затем сопоставление результатов моделирования с макроэкспериментом.

Здесь, в первой части исследования, проводится во многом гипотетическое моделирование ситуаций структурной механики на уровне волокно – матрица. Выясняется роль интенсивности адгезионного взаимодействия матрицы с волокном и влияние жесткости матрицы на передачу усилий от цельного к разорванному волокну. Последнее обстоятельство особенно актуально для композита на основе штапельных волокон, каковым и является исследуемый здесь композит.

Переходя к исследованию взаимодействия волокон и матрицы, на вопрос, что такое адгезия можно ответить так. Это явление или процесс установления некоторых связей, обладающих конечной энергией разрыва, между адгезивом (клеем, матрицей) и субстратом. Допустим, что мы можем регулировать плотность этих связей между поверхностями адгезива и субстрата. Например, при плотности связей  $n_{p1}=10^{14}/\text{см}^2$  это будет означать, что задействован примерно каждый десятый атом поверхности субстрата с противоположащим ему атомом адгезива. Такая среда будет обладать модулем Юнга  $E^*$  вдоль стержней и модулем сдвига  $G^*$ , характеризующим связь между деформацией сдвига  $\gamma$  в плоскости контакта и напряжением сдвига  $\tau = G^* \gamma$ . Если мы задействуем каждый сотый атом, то плотность связей станет равной примерно  $n_{p2}=10^{12}/\text{см}^2$ . Тогда и модуль Юнга  $E^*$  и модуль сдвига  $G^*$  контактного слоя также уменьшатся на два порядка. Вот таким образом мы можем воздействовать на адгезионное взаимодействие и его интенсивность. Величина этого взаимодействия может меняться в диапазоне нескольких порядков. Представим себе эти связи в виде коротких длиной  $h^*$  упругих стерженьков перпендикулярных поверхностям субстрата и адгезива. Стерженьки, поскольку они редки, не касаются друг друга. Таким образом, стерженьки – связи создают некоторый слой толщиной  $h^*$  анизотропной сплошной среды, который можно назвать контактным слоем.

В такой среде заведомо отсутствуют нормальные напряжения, перпендикулярные «боковой» поверхности стерженьков.

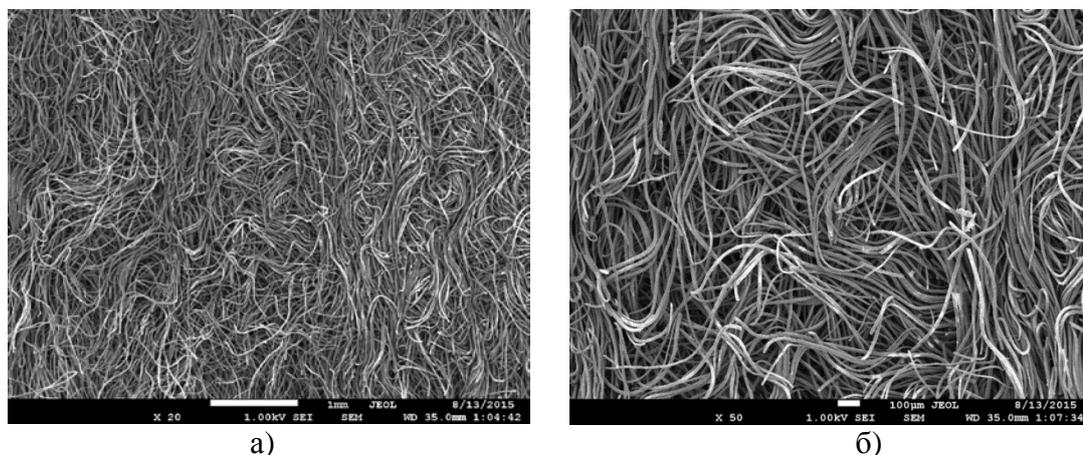


Рис.1. Углеродный каркас из штапельных волокон для углерод-углеродного композита. 20-кратное (а) и 50-кратное (б) увеличение.

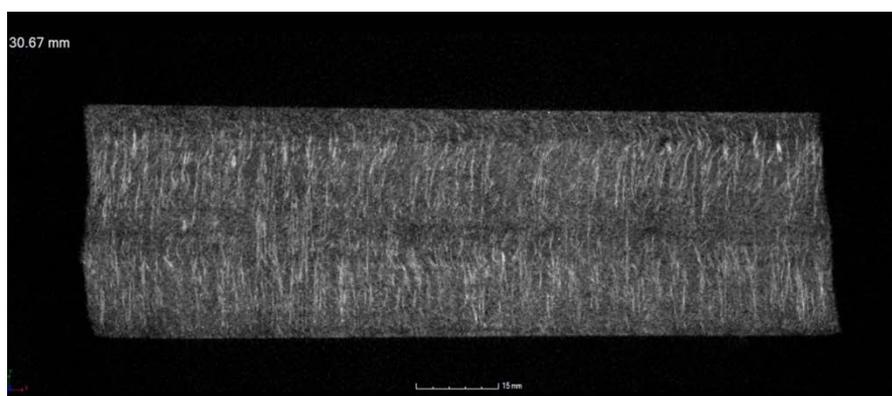


Рис.2. Томографическое изображение углеродного каркаса из штапельных волокон для углерод-углеродного композита (получено на рентгеновском компьютерном томографе ХТН 225+320 LC). Видны вертикальные поперечно слоям ориентированные области, образованные иглопробиванием соседних слоев.

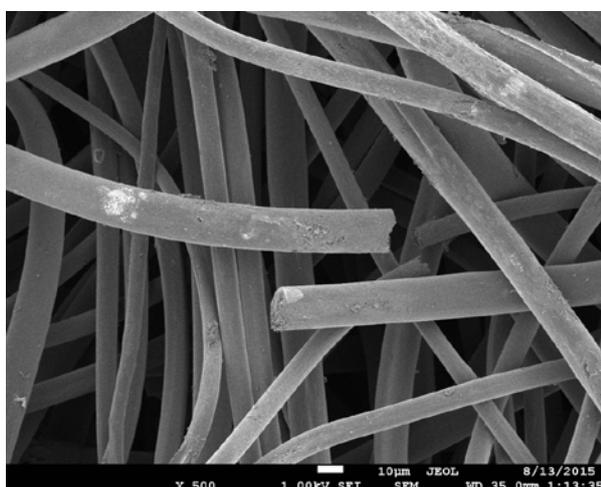


Рис.3. Каркас из штапельных волокон для углерод-углеродного композита. 500-кратное увеличение.

## 1. ИСХОДНЫЕ МОДЕЛИ

Задача о передаче усилия от цельного волокна к волокну, претерпевшему одиночный разрыв, является одной из фундаментальных задач микромеханики волокнистых композитов на основе непрерывных и штапельных волокон [1,4,5]. И если вопрос о важности передачи усилий от цельного волокна к соседнему параллельному и рядом лежащему разорванному волокну для ориентированных армированных непрерывными волокнами материалов совершенно понятен, то про композиты на основе рубленых, т.е. сравнительно коротких и часто первоначально неориентированных волокон, это вряд ли можно утверждать так однозначно. На рис.1-3 представлена одна из таких ситуаций. Относятся эти снимки к процессу создания каркасов для углерод-углеродных композитов на основе карбонизованных штапельных (нарезанных) волокон окисленного полиакрилонитрила (оксипана) длиной 50-60 мм. Из рис.1 с разной степенью увеличения в 20 и 50 раз соответственно видно, что структура каркасов представляет собой пучки из нескольких параллельных волокон. Много разрывов волокон, что для штапельных волокон естественно. С помощью чесальной машины из таких волокон на стадии полимера формируют полотно. В ряде случаев [1] полотно уплотняется струями воды под большим давлением из форсунок. Далее полотна складывают и подвергают процессу иглопробивания. Эти иглы протягивают волокна из верхнего полотна в нижнее, на глубину не более длины иглы. Протянутые волокна сшивают два и более полотен, и создают пространственный каркас с преимущественной ориентацией волокон (рис.2). Каркас в последующем подвергают сильному одноосному давлению, предпочтительно в направлении перпендикулярном иглопробиванию, понуждая волокна к дополнительной ориентации. После различных термических воздействий, приводящих к переводу полимера (окисленного полиакрилонитрила) в углеродное состояние, каркас несколько раз пропитывают пеком. А затем в результате высокотемпературной обработки получают углерод-углеродный композит. На рис.3 каркаса с 500-кратным увеличением видны два близко лежащих конца волокон. Естественно, от них в последующем в композите можно ожидать концентрации напряжений. И одним из важных вопросов для композитов на основе штапельных волокон является вопрос о максимально эффективной работе волокна. Иначе – какая часть длины короткого волокна оказывается работающей, или как велика зона краевого эффекта, на протяжении которого волокно нагружается.

Краевому эффекту вблизи разрыва (торца) волокна в композите посвящено довольно много работ различных авторов (ссылки в работах [4-11]). Но в них практически не исследовалась роль адгезионного взаимодействия, поскольку адгезионное взаимодействие в этих работах никак не характеризовалось, а по умолчанию полагалось абсолютным. Последнее означает, что на границе выполнялись лишь фундаментальные требования непрерывности векторов перемещений и напряжений, т.е. требования сохранения сплошности и выполнение третьего закона Ньютона. В этом случае с неизбежностью получаются решения, в которых касательные напряжения в угловых точках устремляются к бесконечности, т.е. проявляется так называемая сингулярность. Применение физически оправданных критериев прочности в этих условиях становится практически невозможным.

Работы, посвященные методу контактного слоя в адгезионной механике (вначале авторы его называли пограничным слоем) начались в Советском Союзе

в начале семидесятых годов (например, [13-20]) и продолжают в настоящее время [6-9,12]. На Западе первые работы по характеристике адгезионного контакта появились лишь в девяностые годы [21-26]. В основном это сдвиговая пружинная модель наподобие винклеровского основания. В частности, модель многочисленных и регулярных предразрушений волокна в модели композита испытана, рассчитана методом контактного слоя и объяснена в работах [12,16,17] экстремальным распределением напряжений вблизи края волокна вследствие симметричного изгиба модели композита. Кроме того в этих работах показано, что число разрывов волокна перед разрушением модели как целого экстремально зависит от температуры испытаний. Подобное исследование проведено через двадцать лет в работе [26] с привлечением пружинной модели и при постоянной температуре. На рис.4 и 5 представлены изучаемые здесь схемы.

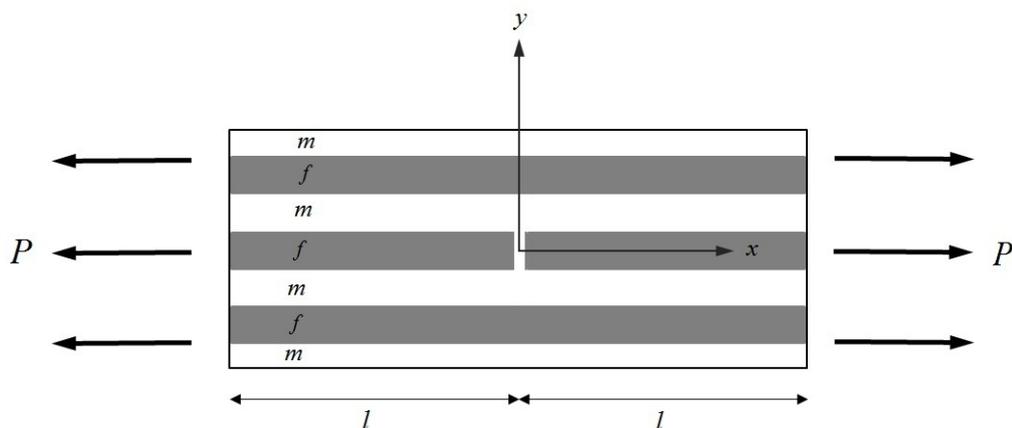


Рис.4. Модель 1. Разорвано лишь центральное волокно. Матрица и соседние волокна остаются цельными.

Первая, когда разорвано лишь волокно, а окружающая матрица остается цельной (рис.4). И ее исследованию посвящена представленная здесь первая часть. И вторая схема, когда рвется волокно и окружающая его матрица (рис.5), будет рассмотрена во второй части.

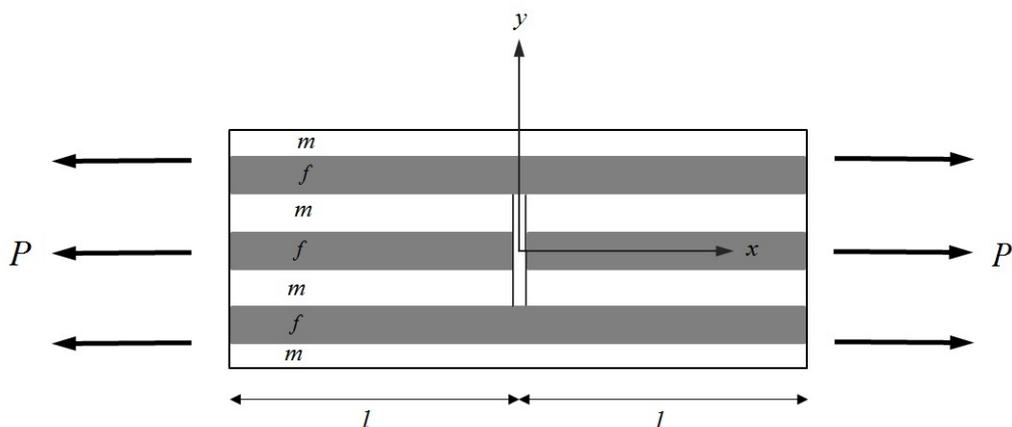


Рис.5. Модель 2. Разорвано центральное волокно и слой матрицы, прилегающий к нему.

Во второй части также будет предпринята попытка сформулировать компромисс между требованиями, предъявляемыми к прочности волокна,

интенсивности адгезионного взаимодействия, прочности адгезионной связи и жесткости матрицы. На рис.6 представлена соответствующая первому случаю расчетная модель. Правая часть расчетной модели представляет нам разрыв – на этом торце отсутствуют нагрузки. Под номером «0» на рис.6 представлено разорванное волокно. Место разрыва – правое сечение – не нагружено. Цифрой 1 обозначена матрица. На этой модели рис.6 заштрихованы контактные слои.

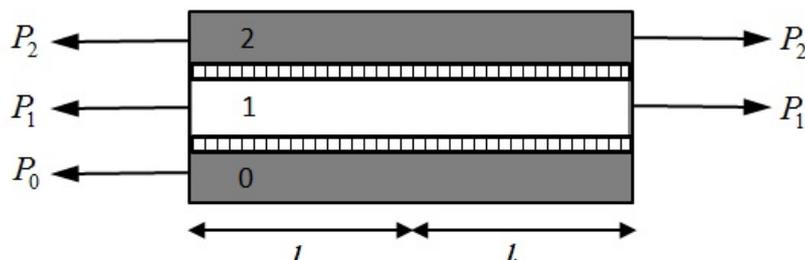


Рис.6. Модель 1. Плоская одномерная модель для расчёта напряженно-деформированного состояния ситуации на рис.4. Разорвано волокно 0. На модели разрыв справа ( $x=l$ ), где нагрузка отсутствует. Матрица 1 и волокно 2 остаются цельными. Заштрихованы контактные слои.

## 2. МЕТОД КОНТАКТНОГО СЛОЯ И ИСХОДНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ

Одним из основных предположений о контактном слое является то, что его толщина мала [6,9,12]. Используя эту гипотезу, получим уравнения непосредственно для многослойной одномерной модели, состоящей из многих одномерных стержней, представляющих собой слои субстратов (например, волокон) и адгезивов (например, полимерных), соединенных по боковой поверхности между собой контактными слоями (рис.7). Силы  $F$  на рис.7 приложены для примера. Модель зафиксирована и вращения нет.

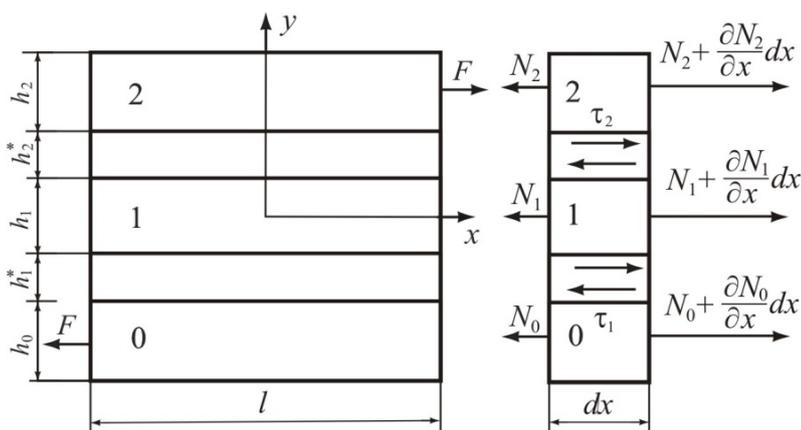


Рис.7. Расчетная схема плоской задачи: 1 – армирующий стержень; 0 и 2 – полимерные пластинки; между армирующим стержнем и полимерными пластинками – контактные слои. Фрагмент элемента многослойной пластинки (слева) с действующими на элемент  $dx$  внутренними усилиями и напряжениями (справа).

Условие равновесия элемента  $dx$  одномерного стержня  $k$  ( $k=0,1,2,\dots,n$ )

$$-\tau_k b dx - N_k b + \tau_{k+1} b dx + \left[ \left( \frac{dN_k}{dx} \right) dx \right] b = 0.$$

Отсюда получается дифференциальное уравнение равновесия элемента  $k$ -го стержня

$$\tau_k - \tau_{k+1} = \frac{dN_k}{dx}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \tag{1}$$

В (1) принято  $N_k = \sigma_{xk} h_k$  – т.е. усилие, действующее на единице ширины модели. Ширина модели  $b$ . Если к наружным поверхностям стержней 0 и  $n$  не приложены касательные напряжения, то  $\tau_0 = \tau_{m+1} = 0$ .

Полная деформация  $k$ -го стержня вдоль оси  $Ox$  складывается из упругой деформации  $e_k$  и обобщенной деформации  $\varepsilon_{qk}$ , под которой по-прежнему будем понимать температурную, химическую, влажностную деформации, либо их суммы

$$\varepsilon_{xk} = \frac{N_k}{h_k E_k} + \varepsilon_{qk} \tag{2}$$

С перемещением  $u_k$  вдоль оси  $x$  полная деформация связана соотношением Коши

$$\varepsilon_{xk} = \frac{du_k}{dx} \tag{3}$$

В силу малости толщины контактного слоя, работающего на сдвиг вдоль поверхности стержня, можно считать, что перемещения  $u_k^*$  в нем меняются по линейному закону [5-8] (рис.8)

$$u_k^* = a_k + c_k y; \tag{4}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} (h_i + h_i^*) \leq y \leq \sum_{i=0}^{k-1} (h_i + h_i^*) + h_k^*, \quad h_0^* = 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

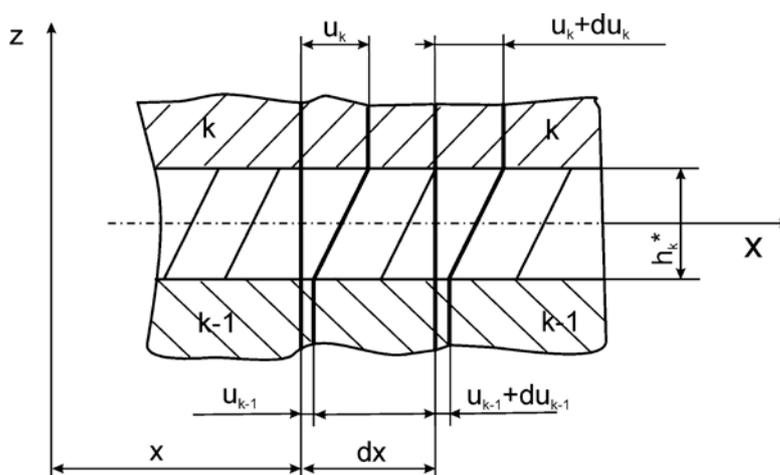


Рис.8 Схема перемещений по оси  $Ox$  элементов слоистой системы.  $h_k^*$  – толщина контактного слоя.

На границах между слоями смещения должны быть непрерывными и граничные условия для перемещений:

$$y = \sum_{i=0}^{k-1} (h_i + h_i^*); \quad u_k^* = u_{k-1}; \quad (5)$$

$$y = \sum_{i=0}^{k-1} (h_i + h_i^*) + h_k^*; \quad u_k^* = u_k.$$

Отсюда получаем

$$c_k = \frac{u_k - u_{k-1}}{h_k^*}; \quad a_k = \frac{\left[ \sum_{i=0}^{k-1} (h_i + h_i^*) + h_k^* \right] u_{k-1} + \left[ \sum_{i=0}^{k-1} (h_i + h_i^*) \right] u_k}{h_k^*} \quad (6)$$

Сдвиговые деформации в контактном слое

$$\varepsilon_{xy,k} = \frac{\partial u_k}{\partial y} \quad (7)$$

Из (4)-(7) получаем

$$\varepsilon_{xy,k} = c_k = \frac{(u_k - u_{k-1})}{h_k^*} \quad (8)$$

Деформации сдвига упругого контактного слоя связаны со сдвиговыми напряжениями законом Гука

$$\varepsilon_{xy,k} = e_{xy,k} = \frac{\tau_k}{G_k^*} \quad (9)$$

В результате подстановок и преобразований получаем

$$\frac{d\tau_k}{dx} = \frac{G_k^*}{h_k^*} \left[ \frac{(N_k)}{h_k E_k} - \frac{N_{k-1}}{(h_{k-1} E_{k-1})} + \varepsilon_{q,k} - \varepsilon_{q,k-1} \right] \quad (10)$$

Дифференцируя (1) по  $x$  и исключая производные от касательных напряжений посредством (10), получаем систему уравнений для искомым функций  $N_k(x)$

$$\frac{d^2 N_k}{dx^2} - \left( \frac{G_k^*}{h_k^* h_k E_k} + \frac{G_{k+1}^*}{h_{k+1}^* h_k E_k} \right) N_k + \frac{G_k^*}{h_k^* h_{k-1} E_{k-1}} N_{k-1} + \frac{G_{k+1}^*}{h_{k+1}^* h_{k+1} E_{k+1}} N_{k+1} + \frac{G_{k+1}^*}{h_{k+1}^*} (\varepsilon_{q,k+1} - \varepsilon_{q,k}) - \frac{G_k^*}{h_k^*} (\varepsilon_{q,k} - \varepsilon_{q,k-1}) = 0. \quad (11)$$

Для слоев 0 и  $n$  получаем соответственно

$$\frac{d^2 N_0}{dx^2} - \left( \frac{G_1^*}{h_1^*} \right) \left[ \frac{N_0}{(h_0 E_0)} - \frac{N_1}{(h_1 E_1)} - (\varepsilon_{q,1} - \varepsilon_{q,0}) \right] = 0;$$

$$\frac{d^2 N_n}{dx^2} - \left( \frac{G_n^*}{h_n^*} \right) \left[ \frac{N_n}{(h_n E_n)} - \frac{N_{n-1}}{(h_{n-1} E_{n-1})} - (\varepsilon_{q,n} - \varepsilon_{q,n-1}) \right] = 0 \quad (12)$$

Система (11) и (12) содержит  $n+1$  уравнение для нахождения  $n+1$  неизвестного  $N_k$ . Решение этой системы при заданных граничных условиях для  $N_k$  при  $x = \pm l/2$  не представляет принципиальных трудностей.

### 3. ФОРМУЛИРОВКА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И РЕШЕНИЕ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

#### 3.1. Модель 1. Разорвано лишь волокно «0».

Сформулируем граничные условия для пятислойной модели в случае цельной матрицы и волокна 2; разорвано лишь волокно 0, (рис.4,6) – модель 1

$$x = -l: \left. \begin{aligned} N_0 &= \frac{P_0^*}{b} = \frac{\sigma_0^* \cdot S_0}{b} = \frac{P}{b} \cdot \frac{E_0 \cdot S_0}{E_0 S_0 + E_1 S_1 + E_2 S_2} = \frac{P}{b} \cdot \frac{E_0 h_0}{E_0 h_0 + E_1 h_1 + E_2 h_2} \\ N_1 &= \frac{P_1^*}{b} = \frac{\sigma_1^* \cdot S_1}{b} = \frac{P}{b} \cdot \frac{E_1 S_1}{E_0 S_0 + E_1 S_1 + E_2 S_2} = \frac{P}{b} \cdot \frac{E_1 h_1}{E_0 h_0 + E_1 h_1 + E_2 h_2} \\ N_2 &= \frac{P_2^*}{b} = \frac{\sigma_2^* \cdot S_2}{b} = \frac{P}{b} \cdot \frac{E_2 S_2}{E_0 S_0 + E_1 S_1 + E_2 S_2} = \frac{P}{b} \cdot \frac{E_2 h_2}{E_0 h_0 + E_1 h_1 + E_2 h_2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Теперь граничные условия для другого конца

$$x = l: \left. \begin{aligned} N_0 &= 0 = \frac{P_0}{b} \\ N_1 &= \frac{E_1 h_1 P}{b(E_1 h_1 + E_2 h_2)} = \frac{P_1}{b} \\ N_2 &= \frac{E_2 h_2 P}{b(E_1 h_1 + E_2 h_2)} = \frac{P_2}{b} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Введем функции

$$\varphi = N_0 + N_2; \quad f = N_0 - N_2 \quad (15)$$

Общее уравнение равновесия всей модели

$$N_0 + N_1 + N_2 = \frac{P}{b} \quad (16)$$

Далее без ограничения общности будем считать, что элементы 0 и 2 одинаковы.

Дифференциальные уравнения для  $N_0$  и  $N_2$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 N_0}{dx^2} + \frac{G^*}{h^*} \left( -\frac{1}{d_0} \cdot N_0 + \frac{1}{d_1} \cdot N_1 + \varepsilon_{q_1} - \varepsilon_{q_0} \right) &= 0 \\ \frac{d^2 N_2}{dx^2} + \frac{G^*}{h^*} \left( -\frac{1}{d_0} \cdot N_2 + \frac{1}{d_1} \cdot N_1 + \varepsilon_{q_1} - \varepsilon_{q_0} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Здесь учтено, что элементы 0 и 2 одинаковы, т.е.

$$k_0 = k_2; \quad \varepsilon_{q_0} = \varepsilon_{q_2} \cdot \frac{G_1^*}{h_1^*} = \frac{G_2^*}{h_2^*} = \frac{G^*}{h^*} \quad (18)$$

Получим граничные условия для  $\varphi$  и  $f$

$$x = l: \left. \begin{aligned} \varphi &= N_0 + N_2 = \frac{P}{b} \cdot \frac{(E_0 h_0 + E_2 h_2)}{E_0 h_0 + E_1 h_1 + E_2 h_2} \\ f &= N_0 - N_2 = \frac{P}{b} \cdot \frac{(E_0 h_0 - E_2 h_2)}{E_0 h_0 + E_1 h_1 + E_2 h_2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$x = -l: \left. \begin{aligned} \varphi = N_0 + N_2 = 0 + N_2 = \frac{E_2 h_2 \cdot P}{(E_1 h_1 + E_2 h_2) b} \\ f = N_0 - N_2 = 0 - N_2 = -\frac{E_2 h_2 \cdot P}{(E_1 h_1 + E_2 h_2) \cdot b} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Введем обозначения

$$d_0 = E_0 h_0; \quad d_1 = E_1 h_1; \quad d_2 = E_2 h_2 \quad (*)$$

Из (18) получим дифференциальные уравнения для  $\varphi$  и  $f$  ( $N_1$  определяем из (16))

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{1}{d_0} + 2 \frac{1}{d_1} \right) \varphi + 2 \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{P}{b} \frac{1}{d_1} + \varepsilon_{q_1} - \varepsilon_{q_0} \right) &= 0 \\ \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{G^*}{h^*} \frac{1}{d_0} \cdot (N_0 - N_2) &= 0; \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{d_0} \frac{G^*}{h^*} f = 0 \end{aligned}$$

Обозначим

$$\omega_1^2 = \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{1}{d_0} + 2 \frac{1}{d_1} \right); \quad \omega_2^2 = \frac{G^*}{h^*} \cdot \frac{1}{d_0}; \quad (21)$$

И окончательно получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \omega_1^2 \varphi + 2 \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{1}{d_1} \frac{P}{b} + \varepsilon_{q_1} - \varepsilon_{q_0} \right) &= 0 \\ \frac{d^2 f}{dx^2} - \omega_2^2 \cdot f &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Решение системы (22)

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A_1 \cdot sh(\omega_1 x) + B_1 \cdot ch(\omega_1 x) + \varphi_{\text{частн.}} \\ f &= A_2 \cdot sh(\omega_2 x) + B_2 \cdot ch(\omega_2 x) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$\varphi_{\text{частн.}}$  найдем, положив в (22)  $\varphi = const$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{частн.}} &\Rightarrow -\frac{G^*}{h^*} \left( \frac{1}{d_0} + 2 \frac{1}{d_1} \right) \cdot \varphi_{\text{частн.}} + 2 \frac{1}{d_1} \frac{G^*}{h^*} \cdot \frac{P}{b} + 2 \frac{G^*}{h^*} (\varepsilon_{q_1} - \varepsilon_{q_0}) = 0 \\ \varphi_{\text{частн.}} &= \frac{2d_0 d_1}{d_1 + 2d_0} \left( \frac{1}{d_1} \frac{P}{b} + \varepsilon_{q_1} - \varepsilon_{q_0} \right) = \varphi_r \end{aligned} \quad (24)$$

Из граничных условий (19) и (20) для  $\varphi$  и  $f$  в случае, когда матрица 1 и волокно 2 остаются цельными, а рвётся лишь волокно 0, находим константы  $A_1, B_1, A_2, B_2$ . И получаем окончательно искомые функции

$$f(x) = -\frac{P}{2b} \cdot \frac{d_0}{d_0 + d_1} \cdot \left( \frac{sh(\omega_2 x)}{sh(\omega_2 l)} + \frac{ch(\omega_2 x)}{ch(\omega_2 l)} \right) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{P}{2b} \cdot \frac{d_0 d_1}{(d_0 + d_1)(2d_0 + d_1)} \cdot \left( \frac{sh \omega_1 x}{sh \omega_1 l} + \frac{ch \omega_1 x}{ch \omega_1 l} \right) + \frac{P}{b} \cdot \frac{2d_0}{2d_0 + d_1} = \\ &= \frac{P}{2b} \cdot \frac{d_0}{(2d_0 + d_1)} \left[ -\frac{d_1}{(d_0 + d_1)} \cdot \left( \frac{sh \omega_1 x}{sh \omega_1 l} + \frac{ch \omega_1 x}{ch \omega_1 l} \right) + 4 \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Зная  $\varphi(x)$  и  $f(x)$  определим  $N_i$ ; ( $i = 0, 1, 2$ ) и соответственно напряжения в элементах

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xi} &= \frac{N_i}{h_i}; (0,1,2): \\ \sigma_{x0} &= \frac{N_0}{h_0} = \frac{\varphi + f}{2h_0}; \\ \sigma_{x1} &= \frac{N_1}{h_1} = \frac{1}{h_1} \cdot \left( \frac{P}{b} - \varphi \right); \\ \sigma_{x2} &= \frac{N_2}{h_2} = \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\varphi - f}{2} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Напомним, что  $h_2 = h_0$ .

Касательные напряжения: т.к.  $\tau_0 = \tau_3 = 0$ , то из уравнений равновесия

$$\tau_i - \tau_{i+1} = \frac{dN_i}{dx} \quad (i = 0,1,2) \quad (28)$$

находим

$$\tau_1(x) = -\frac{dN_0}{dx}; \quad \tau_2(x) = \frac{dN_2}{dx} \quad (29)$$

Для приведенных безразмерных нормальных напряжений имеем

$$\begin{aligned} \sigma'_0 &= \sigma_{x0} \frac{bh_0}{P} = \frac{\varphi(x) + f(x) bh_0}{2P} = \\ &= \frac{d_0}{4} \left[ \frac{1}{(2d_0 + d_1)} \left[ -\frac{d_1}{(d_0 + d_1)} \cdot \left( \frac{sh(\omega_1 x)}{sh(\omega_1 l)} + \frac{ch(\omega_1 x)}{ch(\omega_1 l)} \right) + 4 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(d_0 + d_1)} \left[ \frac{sh(\omega_2 x)}{sh(\omega_2 l)} + \frac{ch(\omega_2 x)}{ch(\omega_2 l)} \right] \right] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= \sigma_{x1} \frac{bh_1}{P} = \frac{1}{2} \left( 2 - \varphi \frac{2bh_1}{P} \right) = \\ &= \frac{d_1}{2h_1(2d_0 + d_1)} \left[ 2 + \frac{d_0}{(d_0 + d_1)} \cdot \left( \frac{sh(\omega_1 x)}{sh(\omega_1 l)} + \frac{ch(\omega_1 x)}{ch(\omega_1 l)} \right) \right] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_2 &= \sigma_{x2} \frac{bh_0}{P} = \frac{\varphi(x) - f(x) bh_0}{2P} = \\ &= \frac{d_0}{4} \left[ \frac{1}{(2d_0 + d_1)} \left[ -\frac{d_1}{(d_0 + d_1)} \left( \frac{sh(\omega_1 x)}{sh(\omega_1 l)} + \frac{ch(\omega_1 x)}{ch(\omega_1 l)} \right) + 4 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(d_0 + d_1)} \left[ \frac{sh(\omega_2 x)}{sh(\omega_2 l)} + \frac{ch(\omega_2 x)}{ch(\omega_2 l)} \right] \right] \end{aligned} \quad (32)$$

Приведенные, но размерные  $[1/m]$  касательные напряжения

$$\begin{aligned} \tau'_1 &= \tau_1(x) \frac{b}{P} = \frac{dN_0}{dx} \frac{b}{P} = \frac{d(\varphi + f) b}{dx P} = -h_0 \frac{d\sigma_{x0}}{4dx} = \\ &= \frac{d_0}{4(d_0 + d_1)} \left[ \omega_1 \frac{d_1}{(2d_0 + d_1)} \left( \frac{ch(\omega_1 x)}{sh(\omega_1 l)} + \frac{sh(\omega_1 x)}{ch(\omega_1 l)} \right) + \omega_2 \left[ \frac{ch(\omega_2 x)}{sh(\omega_2 l)} + \frac{sh(\omega_2 x)}{ch(\omega_2 l)} \right] \right] \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}\tau'_2 &= \tau_2(x) \frac{b}{P} = \frac{dN_2}{dx} \frac{b}{P} = \frac{d(\varphi - f)}{dx} \frac{b}{P} = h_2 \frac{d\sigma_{x2}}{4dx} = \\ &= \frac{d_0}{4(d_0 + d_1)} \left[ -\omega_1 \frac{d_1}{(2d_0 + d_1)} \left( \frac{ch(\omega_1 x)}{sh(\omega_1 l)} + \frac{sh(\omega_1 x)}{ch(\omega_1 l)} \right) + \omega_2 \left[ \frac{ch(\omega_2 x)}{sh(\omega_2 l)} + \frac{sh(\omega_2 x)}{ch(\omega_2 l)} \right] \right] \quad (34)\end{aligned}$$

Результаты расчетов распределения всех приведенных напряжений по формулам (30)-(34) в модели 1 с одним разорванным волокном представлены на рис.9-12. В качестве базовых при расчетах были взяты приведённые ниже параметры.

### 3.2. Результаты расчетов. Модель 1.

Запишем для ориентировки краевые условия для искомым приведенных функций.

Краевые условия для приведенных нормальных напряжений в модели 1.

$$\begin{aligned}\sigma'_0(l) &= 0; \quad \sigma'_0(-l) = \sigma_{x0} \frac{bh_0}{P} = \frac{E_0 h_0}{2E_0 h_0 + E_1 h_1} \\ \sigma'_1(l) &= \frac{E_1 h_1}{E_0 h_0 + E_1 h_1} = \sigma_{x1} \frac{bh_1}{P}; \quad \sigma'_1(-l) = \frac{E_1 h_1}{2h_0 E_0 + E_1 h_1} \\ \sigma'_2(l) &= \frac{E_0 h_0}{E_0 h_0 + E_1 h_1} = \sigma_{x2} \frac{bh_0}{P}; \quad \sigma'_2(-l) = \frac{E_0}{2E_0 h_0 + E_1 h_1}\end{aligned}$$

Краевые условия для приведенных касательных напряжений (размерность  $1/m$ ) в модели 1 при  $x=l$ , т.е. вблизи места разрыва волокна 0.

$$\tau'_{1,1}(l) = \frac{2d_0}{4(d_0 + d_1)} \left[ \omega_1 \frac{d_1}{(2d_0 + d_1)} + \omega_2 \right] = \frac{E_0 h_0}{h_0 E_0 + E_1 h_1} \sqrt{\frac{G^*}{h^*} \frac{1}{E_0 h_0}} \left( 1 + \sqrt{\frac{E_1 h_1}{2E_0 h_0 + E_1 h_1}} \right) \quad (36)$$

$$\tau'_{2,1}(l) = \frac{E_0 h_0}{E_0 h_0 + E_1 h_1} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G^*}{h^*} \frac{1}{E_0 h_0}} \left( 1 - \sqrt{\frac{E_1 h_1}{2E_0 h_0 + E_1 h_1}} \right)$$

Оценим границы изменения функций (36) при изменении параметров жесткости.

1. Жесткость матрицы много меньше жесткости волокон:  $E_0 h_0 \gg E_1 h_1$ , тогда

$$\tau'_{1,1}(l) = \frac{\omega_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G^*}{h^*} \frac{1}{E_0 h_0}}; \quad \tau'_{2,1}(l) = \frac{\omega_2}{2}.$$

2. Если  $E_0 h_0 = E_1 h_1$ , тогда

$$\tau'_{1,1}(l) = \frac{\omega_2}{4} = \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{3}} \right); \quad \tau'_{2,1}(l) = \frac{\omega_2}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \quad (37)$$

3. Если  $E_0 h_0 \ll E_1 h_1$ , тогда

$$\tau'_{1,1}(l) = \frac{1}{E_1 h_1} \sqrt{\frac{G^*}{h^*} E_0 h_0}; \quad \tau'_{2,1}(l) = \left( \frac{E_0 h_0}{E_1 h_1} \right)^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G^*}{h^*} \frac{1}{E_0 h_0}}$$

*Базовые параметры для модели:*

Длина  $l = 10 \text{ мм} = 0,01 \text{ м}$  (т.е. вся модель  $2l = 20 \text{ мм}$ ); ширина  $b = 1 \text{ м}$ ; температурный перепад  $\Delta T = 0$ ; интенсивность адгезионного взаимодействия

(жесткость контактного слоя)  $G^*/h^* = 25 \cdot 10^6 \text{ МПа} / \text{м}$ ; толщины стержней:  $h_0 = h_2 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ мм} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ; толщина матрицы  $h_1 = 2,9 \text{ мкм} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ мм} = 2,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ; модули Юнга стержней 0 и 2:  $E_0 = E_2 \cong E_{ст} = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ; модуль Юнга матрицы  $E_1 \cong E_{полимера} = 3 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ .

*И варианты:*

Вариант 1: По сравнению с базовым вариантом заменить жесткость контактного слоя:  $G^*/h^* = 25 \cdot 10^5 \text{ МПа} / \text{м}$ .

Вариант 2: по сравнению с базовым вариантом: модуль Юнга матрицы положить равным модулю Юнга стержней 0 и 2, т.е.  $E_1 = E_0 = E_2 \cong E_{стержня} = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

Вариант 3: по сравнению с вариантом 2: увеличить толщину матрицы и положить ее равной  $h_1 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ .

Расчёты по базовым параметрам приведенных нормальных напряжений отражены на рис.9. Там их представляют *сплошные* кривые 0-2. Кривая 2 – отражает изменение напряжений в цельном волокне т.е. их уменьшение по мере удаления от места разрыва волокна «0». Сплошная кривая 0 – представляет, насколько эффективно включается в полноценную работу разорванное волокно «0». Из рисунка видно, что этот процесс передачи усилий от цельного волокна к разорванному можно считать практически завершённым на расстоянии  $0,00025 \text{ м}$  ( $20-25h_0$  – толщин стержней или условных диаметров  $d=h_0$  волокон). Сплошная кривая 1 в низу графика – соответствует разгрузке матрицы. Её разгрузка, как видно, завершается практически уже через пять-семь диаметров.

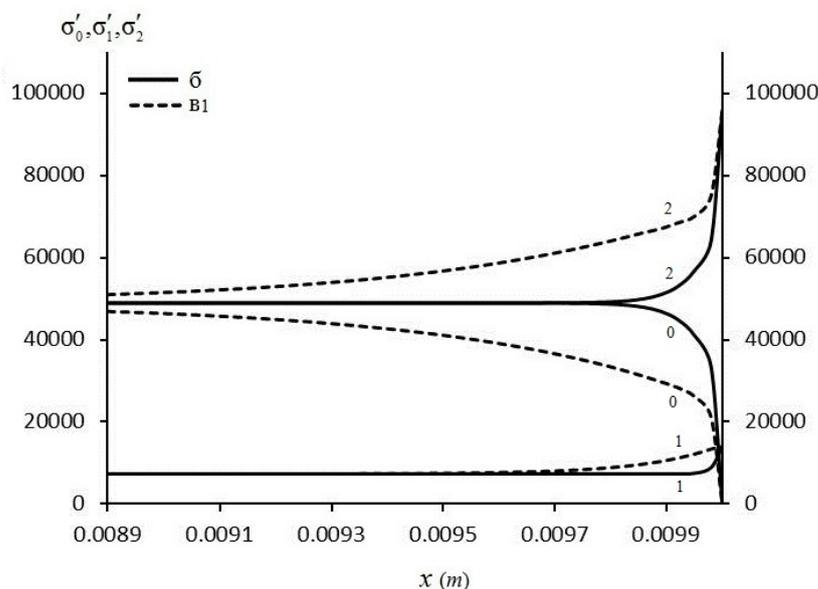


Рис.9. Модель 1. Разорвано волокно 0. Волокно 2 и матрица 1 цельные. Распределение по длине нормальных напряжений в элементах системы вблизи места разрыва волокна 0. Сплошная кривая – базовый вариант, где интенсивность адгезионного взаимодействия  $G^*/h^* = 25 \cdot 10^6 \text{ МПа} / \text{м}$  и модуль Юнга волокон  $E_0 = E_2 \cong E_{стекла} = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ . Пунктирная кривая – вариант 1, в котором  $G^*/h^* = 25 \cdot 10^5 \text{ МПа} / \text{м}$ .

Следующая серия (вариант 1) *штриховых* кривых 0-2 на рис.9 отражает изменение нормальных напряжений в тех же элементах модели, но отличается от базовой серии только меньшей жесткостью контактного слоя  $G^* / h^* = 25 \cdot 10^5 \text{ МПа} / \text{м}$ , которая здесь представляет *интенсивность адгезионного взаимодействия* материала адгезива (т.е. матрицы) с материалом субстрата (волокна). И здесь видно, что равенство напряжений в цельном и разорванном волокнах не достигается даже на расстоянии 0,001м от края разорванного волокна.

Т.е. равновесие наступает значительно позднее, нежели в базовом варианте. По расчётам оно достигается примерно на расстоянии  $250d$  от места разрыва волокна 0. В результате цельное волокно остается перегруженным на значительно большей длине по сравнению с базовым вариантом. А если вспомнить, что прочность волокна является сильной функцией его длины, то это усугубляет опасность разрушения цельного или разорванного волокон.

*Пунктирные* кривые 0-2 на рис.10 представлены в сопоставлении с базовым вариантом (сплошные кривые) и посчитаны по варианту 2, который отличается от базового варианта тем, что модуль Юнга матрицы в нём увеличен до значения модуля Юнга волокон 0 и 2. Но толщина прослойки матрицы по прежнему мала по сравнению с толщиной стержней 0 и 2. Т.е. ее жесткость меньше жесткости этих волокон и потому нагрузка на неё на правом конце модели меньше нагрузки на волокно 2.

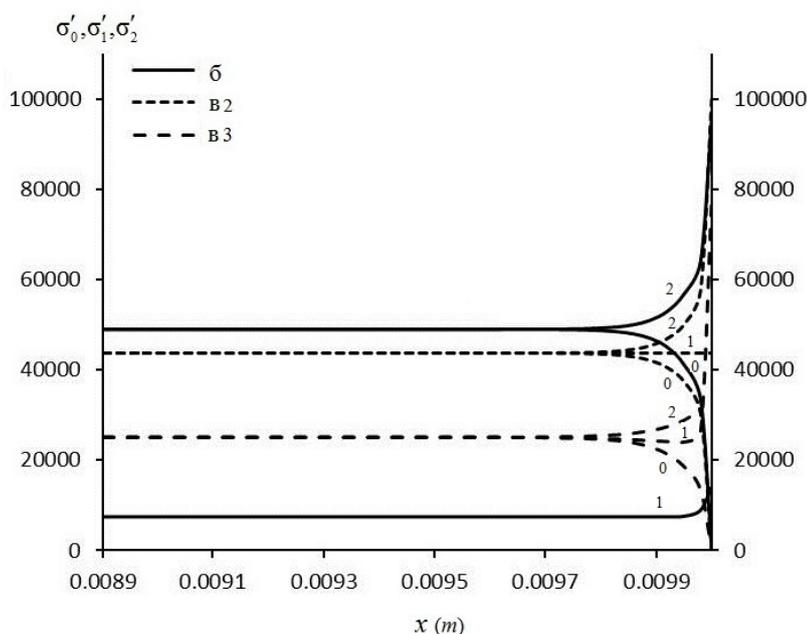


Рис.10. Модель 1. Разорвано волокно 0. Волокно 2 и матрица 1 цельные. Распределение приведённых нормальных напряжений в элементах системы вблизи места разрыва. Сплошная кривая – базовый вариант, где интенсивность адгезионного взаимодействия  $G^* / h^* = 25 \cdot 10^6 \text{ МПа} / \text{м}$  и модуль Юнга волокон  $E_0 = E_2 \cong E_{\text{стекла}} = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ . Пунктирная кривая – вариант 2, модуль Юнга матрицы равен модулю Юнга волокон. Штриховая кривая – вариант 3, по сравнению с вариантом 2 увеличена толщина матрицы до  $2 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 20 \text{ мкм}$ .

Равновесные значения напряжений, как видно из рис.10, у всех трех компонент практически одинаковы. Сравнение для матрицы *пунктирных* кривых 1 со *штриховыми* кривыми 1 (более толстый слой матрицы по сравнению с вариантом 1) свидетельствует лишь о том, что более жёсткая матрица, которой соответствует пунктирная кривая 1, несет на себе справа (т.е. до места разрыва волокна 0) бóльшую нагрузку, по сравнению с цельным волокном 2. Но, судя по штриховым кривым 1 и 2, матрица разгружается быстрее, нежели волокно 2.

На рис.11 и 12 представлены кривые зависимости приведенных, но размерных ( $1/m$ ) касательных напряжений от расстояния от места разрыва волокна «0». Кривые 1(б) и 2(б) соответствуют искомым касательным напряжениям базового варианта. На рисунках слева вверху указаны варианты и вид кривых (сплошная – базовый вариант, а номера перед скобками: 1 – это касательные напряжения  $\tau'_1$  между разорванным волокном 0 и матрицей 1; 2 – касательные напряжения  $\tau'_2$  между цельным волокном 2 и цельной матрицей 1. Кривые свидетельствуют о высокой концентрации касательных напряжений в модели 1. Ширина зоны концентрации касательных напряжений, как видно из сопоставления существенно больше ширины зоны концентрации нормальных напряжений в волокнах 0 и 2 (рис. 9 сплошные кривые 0 и 2). Все касательные напряжения вблизи правого торца модели должны устремляться очень быстро к нулю, поскольку на торцах они не приложены. Здесь этого устремления нет вследствие одномерности модели. Если бы решалась подобная двухмерная задача – в данном случае с учётом изгиба, то нулевые граничные условия для касательных напряжений на торцах выполнялись бы точно [6,9,12]. В этих же работах приведено сравнение результатов решений одной и той же задачи в двухмерной и одномерной постановках.

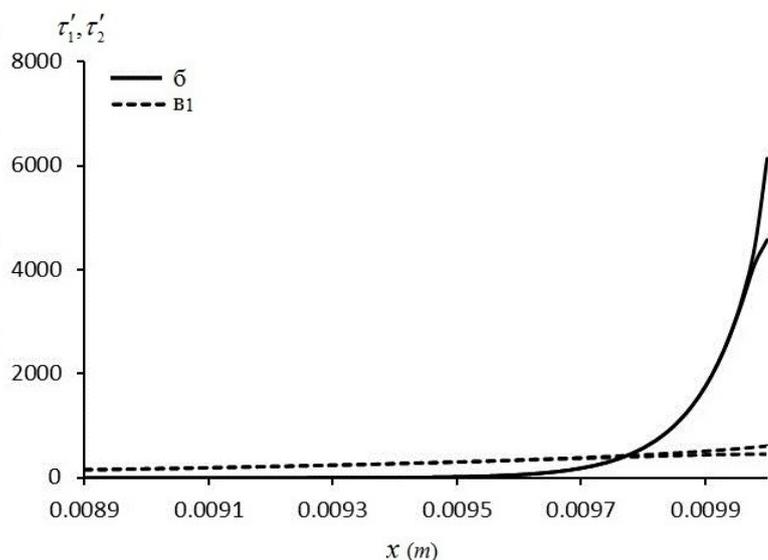


Рис.11. Модель 1. Распределение приведенных касательных напряжений по длине границы вблизи места разрыва волокна 0. Сплошная кривая – базовый вариант, где интенсивность адгезионного взаимодействия  $G^* / h^* = 25 \cdot 10^6 \text{ МПа} / \text{м}$  и модуль Юнга волокон  $E_0 = E_2 \cong E_{\text{стекла}} = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ . Пунктирная кривая – вариант 1, в котором  $G^* / h^* = 25 \cdot 10^5 \text{ МПа} / \text{м}$ .

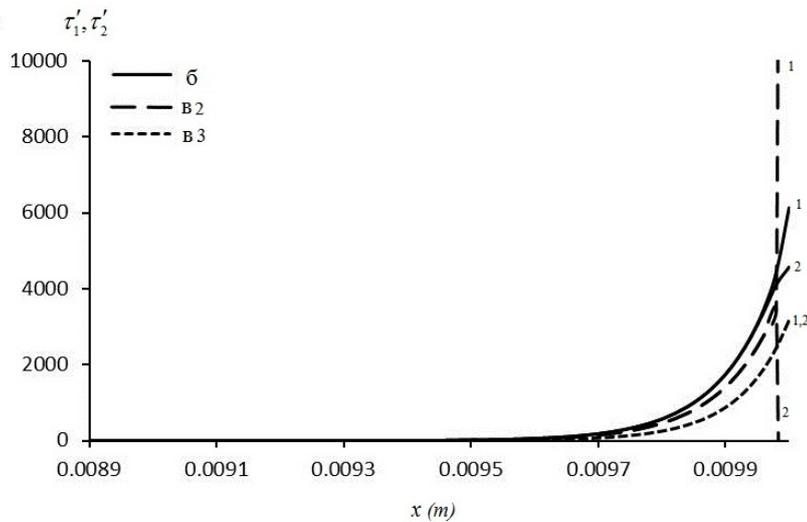


Рис.12. Модель 1. Распределение приведённых касательных напряжений по длине границы вблизи места разрыва волокна 0. Сплошная кривая – базовый вариант, где интенсивность адгезионного взаимодействия  $G^* / h^* = 25 \cdot 10^6 \text{ МПа} / \text{м}$  и модуль Юнга волокон  $E_0 = E_2 \cong E_{\text{стекла}} = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ . Пунктирная кривая – вариант 2, модуль Юнга матрицы равен модулю Юнга волокон. Штриховая кривая – вариант 3, по сравнению с вариантом 2 увеличена толщина матрицы до  $2 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 20 \text{ мкм}$ . Кривые 1 – касательные напряжения на границе волокно 0 – матрица 1, кривые 2 – касательные напряжения на границе волокно 2 – матрица 1.

Показано, что зоны концентрации напряжений практически совпадают. Величины максимумов касательных напряжений в обоих решениях отличаются менее чем на 10%. Максимум напряжений в одномерной задаче находится на торце или вблизи торца (при учете остаточных напряжений или как здесь). Максимум в двумерной задаче вблизи торца, а затем напряжения устремляются к нулю на торце. Этим исследованием в значительной мере оправдано применение одномерных решений для адгезионных моделей, каковые здесь и рассматриваются. Узкая зона концентрации компенсируется высокими значениями касательных напряжений в максимуме. И тогда встаёт вопрос о прочности адгезионной связи волокна с матрицей, и вслед за этим вопрос о компромиссе между прочностью волокна, интенсивностью адгезионного взаимодействия и прочностью адгезионной связи. Действительно, известно, что прочность волокна зависит от его длины – чем короче волокно, тем выше его прочность при растяжении. Это означает, например, что чем меньше интенсивность адгезионного взаимодействия, тем на большей длине цельное волокно рядом с разорванным будет перегружено по сравнению с остальными работающими дальними волокнами. Появляется опасность, что это перегруженное состояние совпадет с прочностью волокна на некоторой длине. Тогда может начаться разрушение волокна на короткие отрезки [6,12].

Совсем иначе выглядят кривые распределения касательных напряжений, когда интенсивность адгезионного взаимодействия  $G^* / h^*$  существенно меньше – на порядок – базового (кривые 1(1), 2(1), и 1(2), 2(2)). Максимальные напряжения почти на порядок меньше максимальных напряжений базового варианта.

А ширина зоны концентрации более чем на порядок превышает таковую в базовом варианте. Но следует отметить, что наибольшими оказываются касательные напряжения  $\tau'_1$  между разорванным волокном 0 и матрицей, а максимум – вблизи места разрыва. А в случае, когда жесткость матрицы превышает жесткость волокон (вариант 3), касательные напряжения между матрицей и цельным волокном равны нулю (вертикальная прямая на рис. 12). Это означает, что даже при наличии контактного слоя волокно 2 и матрица 1 составляют монолит (как будто бы они отлиты заодно).

## ВЫВОДЫ

На основании полученных здесь результатов можно констатировать, что контактное (адгезионное) взаимодействие адгезива с субстратом (здесь – матрицы с волокном) необходимо характеризовать. Для характеристики взаимодействия используется понятие контактного слоя. Он представляется в виде совокупности коротких упругих стерженьков – связей, перпендикулярных поверхности контакта и не касающихся друг друга. Этот слой обладает некоторой толщиной  $h^*$ , равной длине связей, модулем сдвига  $G^*$  в плоскости контакта и модулем Юнга  $E^*$  вдоль стерженьков-связей. По сути это анизотропная сплошная среда. При решении одномерных задач, как, например, приведенных здесь, модуль сдвига и толщина контактного слоя объединяются в один параметр  $G^*/h^*$ , влияние которого является определяющим на характере распределения и интенсивность напряжений вблизи края. Этот параметр может довольно легко определяться из макро эксперимента и предлагаемой здесь теории (см., например, [6,9,12]). Это соотношение авторы предлагают использовать в качестве основной характеристики адгезионного взаимодействия – *интенсивности адгезионного взаимодействия*, естественно, наряду с *прочностью адгезионной связи*. Чем больше эта величина, тем уже зона концентрации нормальных и касательных напряжений на краю. И тем выше максимальные касательные напряжения на границе волокно – матрица в этой зоне. Сейчас в научной литературе в качестве единственной характеристики адгезионного взаимодействия используется прочность адгезионной связи, которая, по сути, является лишь критерием разрушения адгезионной связи.

Приведенный здесь анализ вполне применим к таким углерод-углеродным композитам, у которых модуль Юнга матрицы заметно ниже модуля Юнга армирующих волокон. Однако ситуация с углерод-углеродными композитами, в частности – с материалами на нетканой основе, в которых жесткость матрицы может быть сопоставима и даже превышать жесткость волокон, нуждается в дополнительных подробных специальных исследованиях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Быков Л.В., Богачев Е.А. Елаков А.Б., Белоглазов А.П. *Использование нетканых углеродных материалов в высокотемпературных теплообменниках состава C-SiC*. – Вестник МАИ. – 2014. – Т.21. – №3. – С.110-116.
2. Hayashi T. *Photoelastische untersuchungen der spannungs-vertelung in der durch fasern verstärkten platte. Nonhomogeneity and Plasticity*. – New York: Hill. Book, 1959. – 220 p.

3. Туразян А.В., Рабинович А.Л. *О распределении напряжений в элементарной модели однонаправленной структуры*. – ДАН СССР. – 1970. – Т.194. – №6. – С.1305-1307.
4. Рабинович А.Л. *Введение в механику армированных полимеров*. – М.: Наука, 1970. – 482 с.
5. Rosen B.W. *Strength of Uniaxial Fibrous Composites* / In: *Mechanics of Composite Materials*. – Pergamon Press, 1970. – 694 p.
6. Фрейдин А.С., Турусов Р.А. *Свойства и расчет адгезионных соединений*. – М.: Химия, 1990. – 255 с.
7. Turusov R.A. *Elastic and temperature behavior of a layered structure. Part I. Experiment and theory* // *Mechanics of Composite Materials*. – 2014. – Vol.50. – No.6. – Pp.1119-1130.
8. Turusov R.A. *Elastic and temperature behavior of a layered structure. Part II. Calculation results* // *Mechanics of Composite Materials*. – 2015. – Vol.51. – No.1. – Pp.175-183.
9. Turusov R.A., Manevich L.I. *Contact layer method in adhesive mechanics* // *Polymer Science. Series D*. – 2010. – Vol.3. – No.1. – Pp.11-19.
10. Маневич Л.И., Павленко А.В. *Об учете структурной неоднородности композита при оценке адгезионной прочности* // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1982. – №3. – С.140-145.
11. Салганик Р.Л., Малышев Б.М. *Применение теории трещин для определения прочности хрупкости клеек* // *Докл. АН СССР*. – 1965. – Т.160. – №1. – С.91-93.
12. Турусов Р.А. *Адгезионная механика*. – М.: Изд-во МГСУ, 2015. – 230 с.
13. Турусов Р.А., Вуба К.Т., Фрейдин А.С. *Исследование влияния температурно-влажностных факторов на прочностные и деформационные свойства клеевых соединений древесины со стальной арматурой* // *Труды ЦНИИСК им.В.А.Кучеренко*. – 1972. – Вып.24. – С.86-124.
14. Турусов Р.А., Никишин А.А., Иванова-Мумжиева В.Г. *Некоторые задачи, связанные с определением адгезионной прочности* / *Международный симпозиум «Полимеры-73»*. Доклады. – България, Варна, 1973. – С.198-203.
15. Турусов Р.А., Никишин А.А., Горбаткина Ю.А. *Метод пограничного слоя в задачах механики твердого деформируемого тела* / *Международный симпозиум «Полимеры-73»*. Доклады. – България, Варна, 1973. – С.229-233.
16. Турусов Р.А., Сакварелидзе Ж.Д., Малинский Ю.М. *Исследование механизма разрушения армированных пластиков при нормальных и повышенных температурах* / «Армированные пластики – 74». Доклады. – Чехословакия, Карловы Вары, 1974. – С.97-103.
17. Турусов Р.А., Сакварелидзе Ж.Д., Малинский Ю.М., Вуба К.Т. *Растяжение составных стержней с учетом изгиба как модели клеевых соединений* / В кн. «Труды ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко». – М.: Стройиздат. – 1975. – Вып.53. – С.72-80.
18. Турусов Р.А., Вуба К.Т. *Роль неоднородного напряженного состояния в оценке прочности моделей адгезионных соединений* / В кн. «Физика прочности композиционных материалов». – Ленинград: ЛИЯФ. – 1979. – С.75-84.
19. Турусов Р.А., Вуба К.Т. *Напряженное состояние и особенности оценки прочности адгезионных соединений при сдвиге* // *Физика и химия обработки материалов*. – 1979. – №5. – С.87-94.

20. Турусов Р.А., Вуба К.Т. *Напряженное состояние и особенности оценки прочности адгезионных соединений при отрыве* // Физика и химия обработки материалов. – 1980. – №2. – С.108-115.
21. Hashin Z. *Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface* // J. Mech. Phys. Solids. – 1991. – Vol.39. – Iss.6. – Pp.745-762.
22. Hashin Z. *The spherical inclusion with imperfect interface* // J. Appl. Mech. – 1991. – Vol.58. – Pp.444-449.
23. Hashin Z. *Extremum principles for elastic heterogenous media with imperfect interface and their application to bounding of effective elastic moduli* // J. Mech. Phys. Solids. – 1992. – Vol.40. – Iss.4. – Pp.767-781.
24. Lipton R., Vernescu B. *Variational methods, size effects and extremal microgeometries for elastic composites with imperfect interface* // Math. Models Meth. Appl. Sci. – 1995. – No.5. – Pp.1139-1173.
25. Benveniste Y., Miloh T. *Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity* // Mech. Mater. – 2001. – Vol.33. – Iss.6. – Pp.309-323.
26. Nairn J.A., Liu Yu.Ch., Galiotis C. *Analysis of stress transfer from the matrix to the fiber through an imperfect interface: Application to Raman data and the single-fiber fragmentation test* / In: Fiber, Matrix, and Interface Properties. – American Society for Testing and Materials, 1996. – Pp.47-65.

## REFERENCES

1. Bykov L.V., Bogachev E.A. Elakov A.B., Beloglazov A.P. *Ispol'zovanie netkanykh uglirodnykh materialov v vysokotemperaturnykh teploobmennikakh sostava C-SiC [The use of non-woven carbon materials in high-temperature heat exchangers for composition of C-SiC]*. Vestnik MAI, 2014, Vol.21, No.3, Pp.110-116.
2. Hayachi T. *Photoelastische Untersuchungen der Spannungs-Verteilung in der durch Fasern verstärkten Platte*. Nonhomogeneity and Plasticity. New York, Hill. Book, 1959, 220 p.
3. Turazyan A.V., Rabinovich A.L. *O raspredelenii napryazhenii v elementarnoy modeli odnonapravlennoy strukturi [On the distribution of stress in the basic model the unidirectional structures]*. Rep. The academy of sciences of the USSR. DAN SSSR, 1970, Vol.194, No.6, Pp.1305-1307.
4. Rabinovich A.L. *Vvedenie v mekhaniku armirovannykh polimerov [Introduction into the Mechanics of Reinforced Polymers]*. Moscow, Nauka, 1970, 482 p.
5. Rosen B.W. *Strength of uniaxial fibrous composites*. In: Mechanics of Composite Materials, Pergamon Press, 1970, 694 p.
6. Freydin A.S., Turusov R.A. *Svoistva i raschet adgezionnykh soedinenii [Properties and calculation of adhesive joints]*. Moscow, Khimiia, 1990, 255 p.
7. Turusov R.A. *Elastic and temperature behavior of a layered structure. Part I. Experiment and theory*. Mechanics of Composite Materials, 2014, Vol.50, No.6, Pp.1119-1130.
8. Turusov R.A. *Elastic and temperature behavior of a layered structure. Part II. Calculation results*. Mechanics of Composite Materials, 2015, Vol.51, No.1, Pp.175-183.
9. Turusov R.A., Manevich L.I. *Contact layer method in adhesive mechanics*. Polymer Science, Series D, 2010, Vol.3, No.1, Pp.11-19.
10. Manevich L.I., Pavlenko A.V. *Ob uchete strukturnoi neodnorodnosti kompozita pri otsenke adgezionnoi prochnosti [On the integration of composite structural*

- heterogeneity when estimating adhesive strength*]. *Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaiia fizika*, 1982, No.3, Pp.140-145.
11. Salganik R.L., Malyshev B.M. *Primenenie teorii treshchin dlia opredeleniia prochnosti khrupkosti skleek [Application of the theory of cracks to determine the strength of the fragility of connections]*. Doklady AN SSSR, 1965, Vol.160, No.1, Pp.91-93.
  12. Turusov R.A. *Adgezionnaia mekhanika [Adhesion Mechanics]*. Moscow: MGSU, 2015, 230 p.
  13. Turusov R.A., Vuba K.T., Frejdin A.S. *Issledovanie vliianiia temperaturno-vlazhnostnykh faktorov na prochnostnye i deformatsionnye svoistva kleevykh soedinenii drevesiny so stal'noi armaturoi [Study of the influence of temperature and humidity factors on strength and deformation properties of adhesive joints of wood with steel fittings]*. Trudy CNIISK im. V.A.Kucherenko, 1972, Vyp.24, Pp.86-124.
  14. Turusov R.A., Nikishin A.A., Ivanova-Mumzhieva V.G. *Nekotorye zadachi, svyazannye s opredeleniem adgezionnoi prochnosti [Some tasks related to the determination of adhesion strength]*. Mezhdunarodnyi simpozium «Polimery-73» [International Symposium "polymers-73"], Doklady, Bulgariia, Varna, 1973, Pp.198-203.
  15. Turusov R.A., Nikishin A.A., Gorbatkina Yu.A. *Metod pogranichnogo sloia v zadachakh mekhaniki tverdogo deformiruemogo tela [Boundary layer method in problems of solid deformable body mechanics]*. Mezhdunarodnyi simpozium «Polimery-73» [International Symposium "polymers-73"], Doklady, Bulgariia, Varna, 1973, Pp.229-233.
  16. Turusov R.A., Sakvarelidze Zh.D., Malinskij Yu.M. *Issledovanie mekhanizma razrusheniia armirovannykh plastikov pri normal'nykh i povyshennykh temperaturakh [Investigation of the mechanism of destruction of the reinforced plastics at normal and elevated temperatures]*. «Armirovannye plastiki – 74» ["Reinforced plastics-74"], Doklady, Chekhoslovakiia, Karlovy Vary, 1974, Pp.97-103.
  17. Turusov R.A., Sakvarelidze Zh.D., Malinskij Yu.M., Vuba K.T. *Rastyazhenie sostavnykh sterzhnej s uchetom izgiba kak modeli kleevykh soedinenij [Stretching composite rods, bearing in mind bending as model glue]*. In: «Trudy CNIISK im. V.A.Kucherenko», Moskva, Stroiizdat, 1975, Vyp.53, Pp.72-80.
  18. Turusov R.A., Vuba K.T. *Rol' neodnorodnogo napriazhennogo sostoiianiia v otsenke prochnosti modelei adgezionnykh soedinenii [Stress state and characteristics evaluation of durability of adhesive joints in shear]*. In: «Fizika prochnosti kompozitsionnykh materialov». Leningrad, LIYAF, Pp.75-84.
  19. Turusov R.A., Vuba K.T. *Napriazhennoe sostoyanie i osobennosti otsenki prochnosti adgezionnykh soedinenii pri sdvige [Stress state and particularly evaluate the strength of adhesive joints under shear]*. *Fizika i khimiia obrabotki materialov*, 1979, No.5, Pp.87-94.
  20. Turusov R.A., Vuba K.T. *Napryazhennoe sostoyanie i osobennosti ochenki prochnosti adgezionnykh soedinenij pri otryve [Stress state and characteristics evaluation of durability of adhesive joints in normal detachment]*. *Fizika i khimiia obrabotki materialov*, 1980, No.2, Pp.108-115.
  21. Hashin Z. *Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface*. *J. Mech. Phys. Solids*, 1991, Vol.39, Iss.6, Pp.745-762.
  22. Hashin Z. *The spherical inclusion with imperfect interface*. *J. Appl. Mech.*, 1991, Vol.58, Pp.444-449.

23. Hashin Z. *Extremum principles for elastic heterogenous media with imperfect interface and their application to bounding of effective elastic moduli*. J. Mech. Phys. Solids, 1992, Vol.40, Iss.4, Pp.767-781.
24. Lipton R., Vernescu B. *Variational methods, size effects and extremal microgeometries for elastic composites with imperfect interface*. Math. Models Meth. Appl. Sci., 1995, No.5, Pp.1139-1173.
25. Benveniste Y., Miloh T. *Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity*. Mech. Mater., 2001, Vol.33, Iss.6, Pp.309-323.
26. Nairn J.A., Liu Yu.Ch., Galiotis C. *Analysis of stress transfer from the matrix to the fiber through an imperfect interface: Application to Raman data and the single-fiber fragmentation test*. In: Fiber, Matrix, and Interface Properties, American Society for Testing and Materials, 1996, Pp.47-65.

Поступила в редакцию 21 марта 2016 года.

---

Сведения об авторах:

Турусов Роберт Алексеевич – д.ф.-м.н., гл.н.с., Отдел композиционных материалов, ФГБУН Институт химической физики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [rob-turusov@yandex.ru](mailto:rob-turusov@yandex.ru)  
Богачев Евгений Акимович – к.т.н., нач. отделения, ОАО "Композит", г. Королёв Московской обл., Россия  
Елаков Александр Борисович – с.н.с., ОАО "Композит", г. Королёв Московской обл., Россия