

ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕОНОМНОГО ПОВЕДЕНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ СО СТЕПЕННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ДЛЯ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ РЕОНОМНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Климов К.Ю.

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, г. Москва,
Россия*

АННОТАЦИЯ

Для описания обнаруженного экспериментально реономного поведения сплавов с памятью формы разработан аналог вязкопластической модели со степенной зависимостью для скорости роста реономной деформации. Предложение ввести степенную зависимость обусловлено явной нелинейностью начальной асимптотики экспериментальной кривой ползучести после скачка напряжений в процессе мягкого ступенчатого нагружения. По этой причине модельные кривые, построенные по линейным моделям, предлагаемым в ранее опубликованных работах, недостаточно хорошо согласовывались с результатами эксперимента.

Доказано, что для любого процесса, который может быть мысленно разделён на подпроцессы, каждый из которых является либо процессом монотонного активного нагружения, задаваемым гладкой локально ограниченной функцией нагружения, либо процессом нагружения и разгрузки, не являющимся активным ни в одной точке, в условиях ограничений на целочисленность показателя степени $n \geq 1$ и параметра α функций Вейбулла, необходимым и достаточным условием возможности записи определяющих соотношений модели без неаналитической функции взятия положительной части (далее обозначаемой символом угловых скобок) является следующее положение: разница между деформациями предельно медленного и предельно быстрого процессов должна быть неотрицательной, и не может убывать с ростом напряжения.

Исходя из этого, был предложен способ калибровки модели при использовании метода наименьших квадратов (МНК) и экспериментальных данных для процесса мягкого ступенчатого нагружения. При применении данного подхода была произведена оценка параметров модели при $n=1$ и $n=3$. Для полученных множеств параметров проведена проверка выполнения условий для использования модели без угловых скобок, а также условий на неотрицательность итоговых напряжений в процессе релаксации. Обнаружено улучшение согласованности экспериментальных и модельных кривых, полученных по модели с $n=3$ (по сравнению с линейной моделью, которая эквивалентна модели с параметром $n=1$), для процесса мягкого ступенчатого нагружения.

В данной работе представлены результаты моделирования поведения СПФ в размерных переменных по откалиброванным моделям при $n=1$ и $n=3$ для мягкого ступенчатого нагружения, мягкого и жёсткого монотонного нагружения, а также релаксации напряжений. Для процессов мягкого ступенчатого нагружения и релаксации найден аналитический вид решения. Рассмотрен класс процессов разгрузки и последующего нагружения до начала активного деформирования. Для данного класса процессов получен аналитический вид функции, определяющий зависимость уровня деформаций от напряжения.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; вязкопластическая модель; степенная зависимость; реономные свойства; мягкое и жесткое нагружение; релаксация напряжений; ступенчатое нагружение; калибровка модели

VISCOPLASTIC MODEL FOR RHEONOMIC BEHAVIOUR OF SHAPE-MEMORY ALLOYS WITH A POWER DEPENDENCE FOR RHEONOMIC STRAIN SPEED

Klimov K. Yu.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

ABSTRACT

For the description of experimentally observed rheonomic behavior of shape-memory alloys, the analogue of viscoplastic model with power dependence for rheonomic strain speed has been introduced. The proposal to introduce power dependence is justified by the evident nonlinear initial asymptotic of experimental creep diagram displaying after the spike in stress under the process of stress-controlled stepwise load. That was the reason behind the poor correspondence between the experiment results and the model curves, which were generated based on the linear models introduced in the early works.

It has been proven that for any process, which might be conceptually split into subprocesses, where each of them is either an active monotonic stress process, determined by a smooth and locally bounded stress function, or a stress and unload process which is not active at all internal points, under condition of power exponent $n \geq 1$ where both n and α (which is a Weibull's function power parameter) are integers, the necessary and sufficient condition for the record of model constitutive equations without the non-analytical function to retrieve the positive part (going forwards, will be labeled as an angular bracket symbol) is the following: the difference between deformations in a limiting slow and in a limiting fast load stress process should not be negative, and it cannot decrease with the increase in stress load.

The method of model calibration is offered with the use of a least squares approach and the experimental results from a process of stress-controlled stepwise load. Using the method proposed, the evaluation of model parameters was done under conditions where $n=1$ and $n=3$. All sets of parameters received were tested to meet the conditions for the use of model without the angular brackets and non-negativity of the final loads during the stress-relaxation process. It was determined that the model curves with $n=3$ and the experimental results have a much better consistency (in comparison to the model constructed without a power parameter, which is equivalent to the $n=1$ model) for the stress-controlled stepwise load process.

The simulation results in terms of dimensional variables using the calibrated models for $n=1$ and $n=3$ for the monotone stress-controlled and strain-controlled load processes, stress relaxation process and stress-controlled stepwise load process were presented. Analytical form of solution was derived for the processes of stress-controlled stepwise load and stress relaxation. Investigated the cluster of stress reduction processes with the following load increase up to boundaries of an active process. For such processes, an analytical type of function was derived that allows determining dependency between the deformation level and stress applied.

Keywords: shape memory alloys; viscoplastic model; power dependence; rheonomic properties; stress-controlled and strain-controlled load processes; stress relaxation; stress-controlled stepwise load; model calibration

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1-7] представлены экспериментальные данные по влиянию скорости изменения внешних воздействий на механическое поведение сплавов с памятью формы (СПФ). В работах [8-10] авторы считают, что сам процесс деформирования СПФ является реономным, то есть зависит от масштаба времени. В то же время авторы большинства работ [11-20], изучающих поведение СПФ, придерживаются той точки зрения, что процесс деформирования СПФ сам по себе является склерономным, а наблюдаемое экспериментально реономное поведение обусловлено зависимостью от времени процессов теплопередачи и теплопроводности при выделении и поглощении латентного тепла в процессе фазовых переходов. Однако, экспериментальные данные, опубликованные в [21,22], свидетельствуют о том, что реономное поведение может наблюдаться и в изотермическом процессе, то есть оно не объясняется только лишь процессами теплопроводности. В частности, при мягком изотермическом ступенчатом нагружении для образца из СПФ, находящегося в мартенситном состоянии после скачка напряжения, наблюдается скачок неупругих деформаций и следующий за ним рост деформаций при постоянном напряжении и температуре.

По результатам данных экспериментов были опубликованы работы [23-28], посвящённые моделированию реономного поведения СПФ, а также статья [29], в которой оценивалось влияние реономных свойств СПФ на устойчивость стержня из этих материалов. В частности, в работе [25] была сформулирована простейшая модель реономного поведения СПФ. Линейные определяющие соотношения данной модели позволили описать ряд явлений, наблюдаемых в эксперименте. Но при явной простоте модели, она определённо недостаточно корректно описывала процесс мягкого ступенчатого нагружения (а именно скачок неупругих деформаций и следующий за ним нелинейный рост деформаций с течением времени при фиксированном напряжении).

Попыткой исправить данный недостаток было создание модели [26], в которой помимо предельно медленных процессов для описания скачков деформации вводился также класс предельно быстрых процессов, необходимых для описания скачка неупругих деформаций. Данная модель устранила недостатки первой модели и показала достаточно хорошее качественное согласование с экспериментом по мягкому изотермическому ступенчатому нагружению СПФ. При всех вышеперечисленных достоинствах недостатком данной модели является тот факт, что её применение сопряжено с рядом математических трудностей, в частности, с нарушением условий теоремы о существовании и единственности решения дифференциального определяющего уравнения в нулевой точке плоскости $\varepsilon - \sigma$.

Линейная вязкопластическая модель [27], предложенная позднее, позволила при относительно простом виде определяющих соотношений описать скачки деформаций в процессе мягкого ступенчатого нагружения. Но линейная начальная асимптотика модельных кривых ползучести, построенных по [27] для процесса мягкого ступенчатого нагружения после скачка неупругих деформаций, недостаточно хорошо согласовывалась с явно нелинейной начальной асимптотикой соответствующих экспериментальных кривых.

В данной работе предлагается вязкопластическая степенная модель реономного поведения СПФ, сохраняющая предположение о существовании двух классов склерономных процессов: предельно медленных и предельно быстрых.

Установлено, что данная модель достаточно хорошо описывает как скачки деформаций, так и нелинейную начальную асимптотику роста неупругих деформаций при фиксированном напряжении после их скачка. Более того, при ряде ограничений на параметры входящих в модель функций гарантировано выполнение теоремы существования и единственности решения разрешающего уравнения в каждой точке, а также качественно правильное поведение модельных кривых.

1. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

В рамках данной работы рассматривались процессы, происходящие в СПФ, находящемся в полностью мартенситном состоянии, и обусловленные исключительно структурными превращениями (т.е. явления фазового перехода не анализировались). Модель, описанная в данной работе, является логическим продолжением модели, исследованной в работе [27] с добавлением степенной зависимости для скорости роста реономной деформации с показателем n . Основная задача, решаемая за счёт перехода от линейной зависимости к степенной – улучшение описания роста неупругих деформаций в процессе мягкого ступенчатого нагружения после скачка напряжений. Главной проблемой модели [27] является линейная асимптотика модельных кривых в окрестностях точки ступенчатого изменения напряжения, в то время как экспериментальные кривые демонстрируют явный нелинейный рост неупругих деформаций сразу после скачка. Как результат, модельные и реальные кривые плохо соотносятся друг с другом.

Основополагающим моментом вводимой модели является предположение, что в рамках теории малых деформаций для одномерного случая определяющие соотношения для СПФ имеют следующий вид

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{ne}, \varepsilon^{ne} = \varepsilon^f + \varepsilon^r, \quad (1.1)$$

где $\varepsilon, \varepsilon^e, \varepsilon^{ne}, \varepsilon^f, \varepsilon^r$ – полные, упругие, полные неупругие, мгновенные неупругие и реономные деформации, которые задаются в следующем виде

$$\dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E}, \quad \dot{\varepsilon}^f = \frac{\dot{\sigma}}{H(\sigma)}, \quad (1.2)$$

$$\dot{\varepsilon}^r = k \left(\langle \psi^s(\sigma) - \varepsilon^{ne} \rangle \right)^n \quad (1.3)$$

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$$

В приведённых выше соотношениях n является параметром модели и, в общем случае, может быть любым действительным числом. В данной работе мы ограничимся рассмотрением моделей с $n \geq 1$, которое принимает исключительно целочисленные значения.

Для упрощения вычислений и рассуждений в ряде случаев вместо соотношения (1.3) будет использоваться аналогичное соотношение без угловых скобок. Позже будут сформулированы ограничения, при соблюдении которых допустимо отбрасывание угловых скобок без изменения получаемого решения

$$\dot{\varepsilon}^r = k \left(\psi^s(\sigma) - (\varepsilon^f + \varepsilon^r) \right)^n \quad (1.4)$$

В (1.2), (1.3) E – мгновенный упругий модуль, $H(\sigma)$ – касательный модуль для мгновенных неупругих деформаций, равный бесконечности

при разгрузке и последующем нагружении до уровня активного процесса. Соотношение $\varepsilon = \psi^s(\sigma)$ задает диаграмму неупругого деформирования в процессе предельно медленного активного нагружения, включающую в себя как мгновенные неупругие, так и реономные деформации (без учета упругих деформаций). Для удобства введём функцию, описывающую поведение мгновенных неупругих деформаций, которая может быть задана в активном процессе монотонного нагружения как

$$\psi^f(\sigma) = \int_0^{\sigma} \frac{ds}{H(s)} \quad (1.5)$$

Учитывая соотношения (1.4) и (1.5), уравнение для реономной компоненты деформаций в случае отсутствия угловых скобок можно записать в виде

$$\dot{\varepsilon}^r = k(\psi_1(\sigma) - \varepsilon^r)^n, \quad (1.6)$$

где $\psi_1(\sigma) = \psi^s(\sigma) - \psi^f(\sigma)$ – разница между неупругими деформациями предельно медленного и мгновенного процессов при заданном напряжении.

Исходя из наблюдаемых экспериментально данных, считается, что деформация предельно медленного процесса не может быть меньше деформации соответствующего мгновенного процесса. Исходя из этого, ограничение на функции предельных процессов формулируется естественным образом в виде

$$\psi^s(\sigma) \geq \psi^f(\sigma) \quad (1.7)$$

В полных деформациях, исходя из (1.1), (1.2), (1.3), определяющие соотношения модели записываются в виде

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{H(\sigma)} + k \left(\left\langle \psi^s(\sigma) - \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \right\rangle \right)^n \quad (1.8)$$

В случае отсутствия угловых скобок – в виде

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{H(\sigma)} + k \left(\psi^s(\sigma) - \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \right)^n \quad (1.9)$$

Как было отмечено ранее, постулируется, что неупругая деформация предельно медленных и предельно быстрых процессов при отсутствии активного нагружения (и, в частности, при разгрузке) не меняется. Также, согласно существующим моделям склерономного поведения СПФ [30-32], при разгрузке, следующей за предельно медленным нагружением, полные неупругие деформации не меняются, и разгрузка происходит по упругому сценарию с одним и тем же модулем E . Таким образом, считается, что после активного нагружения до некоторого максимального напряжения σ_0 , деформация при разгрузке и последующем нагружении до σ_0 подчиняется уравнению

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + k \left(\left\langle \psi^s(\sigma_0) - \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \right\rangle \right)^n$$

Степенная модель, так же как и модели [26,27] (в отличие от модели [25]), будет корректно описывать мгновенные скачки неупругой деформации при мгновенном изменении напряжения. Действительно, уравнение (1.3) для суммарной неупругой деформации $\varepsilon^{ne} = \varepsilon^f + \varepsilon^r$ имеет вид

$$\dot{\varepsilon}^{ne} = \frac{\dot{\sigma}}{H(\sigma)} + k \left(\langle \psi^s(\sigma) - \varepsilon^{ne} \rangle \right)^n \quad (1.10)$$

В случае предельно быстрого роста напряжений вторым слагаемым правой части (1.10) можно пренебречь по сравнению с первым. Тогда естественным образом получается выражение для описания скачка неупругих деформаций при скачке напряжений $\Delta\sigma$

$$\Delta\varepsilon^{ne} = \int_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} \frac{d\sigma}{H(\sigma)} = \psi^f(\sigma + \Delta\sigma) - \psi^f(\sigma) \quad (1.11)$$

Возвращаясь к вопросу о возможности записи определяющего соотношения без угловых скобок, можно действовать следующим образом: для начала ввести гипотезу, что содержимое угловых скобок неотрицательно, потом решить уравнение при данных ограничениях, а после этого доказать, что при подстановке полученного решения выражение в угловых скобках действительно неотрицательно, и гипотеза верна. Так, вводя $\chi = \psi_1(\sigma) - \varepsilon^{reon}$ и подставляя данное выражение в (1.3), выражая ε^{reon} через χ и $\psi_1(\sigma)$, получаем уравнение для χ : $\dot{\chi} + k \langle \chi \rangle^n = \psi_1'(\sigma) \dot{\sigma}$. Теперь в рамках гипотезы $\chi(t) \geq 0$ необходимо решить уравнение $\dot{\chi} + k \chi^n = \psi_1'(\sigma) \dot{\sigma}$. После нахождения решения необходимо доказать, что гипотеза верна, и полученное решение $\chi(t)$ является неотрицательным в любой момент времени.

В отличие от уравнения с $n=1$, при $n>1$, в общем случае, решение данного уравнения при неотрицательных начальных условиях не удаётся выразить в квадратурах. Поэтому анализ знака решения $\chi(t)$ в случае $n>1$ усложняется.

Для дальнейшего исследования в качестве $\psi^s(\sigma)$ и $\psi^f(\sigma)$ предполагается использовать функции Вейбулла с целочисленным показателем $\alpha > 1$ (которые при этом условии являются бесконечно дифференцируемыми)

$$\begin{aligned} \psi^s(\sigma) &= \rho_{D1} \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^\alpha \right) \right), \\ \psi^f(\sigma) &= \rho_{D2} \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{\sigma}{\sigma_2} \right)^\alpha \right) \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь ρ_{D1} , ρ_{D2} , σ_1 , σ_2 , α – параметры материала, причём величины ρ_{D1} и ρ_{D2} обозначают максимально возможные деформации для предельно медленного и предельно быстрого процессов.

В случае монотонного активного нагружения, для которого напряжения задаются достаточно гладкой локально ограниченной функцией (например, нагружение с постоянной скоростью роста напряжений), задача Коши для определения $\chi(t)$ может быть записана в виде $\dot{\chi} = f(t) - k\chi^n$, $\chi(0) = \chi_0 \geq 0$.

Таким образом, при условиях $f(0) = f_0 \geq 0$; $\psi_1'(\sigma) \geq 0$ и монотонном активном нагружении, получаем: $f(t) = \psi_1'(\sigma) \dot{\sigma} \geq 0$ в любой момент времени. По теореме существования и единственности решения уравнения, так как при введенных

выше ограничениях правая часть и ее частная производная по χ непрерывны по совокупности аргументов χ и t , решение задачи Коши существует и является единственным. Если предположить, что в некоторой точке T гипотеза $\chi(T) \geq 0$ нарушается, то из непрерывности $\chi(t)$ и начального условия $\chi(0) = \chi_0 \geq 0$ следует, что в некоторой промежуточной точке t решение $\chi(t)$ достигает нулевого значения. Тогда не сложно доказать, что в этой точке выполняется условие $\dot{\chi} = f(t) \geq 0$ и существует окрестность $[t, t + \varepsilon]$, в которой для любого $\tilde{t} \in [t, t + \varepsilon]$ решение удовлетворяет условию $0 \leq \int_t^{\tilde{t}} f(x) e^{-k(\tilde{t}-x)} dx \leq \chi(\tilde{t}) \leq \int_t^{\tilde{t}} f(x) dx$,

что доказывает справедливость гипотезы.

Если же условие $\psi_1'(\sigma) \geq 0$ нарушено, то при достижении функцией χ нуля в условиях процесса монотонного активного нагружения, ОДУ вырождается в $\dot{\chi} = f(t) < 0$, что влечёт за собой уход решения в отрицательную область и нарушение гипотезы $\chi(t) \geq 0$.

Таким образом, в случае монотонного активного нагружения ($\dot{\sigma} \geq 0$) при сформулированных выше ограничениях, условие

$$\psi_1'(\sigma) \geq 0, \quad (1.13)$$

как и в модели [27] с $n=1$, является необходимым и достаточным условием, при котором угловые скобки могут быть убраны без потери смысла (т.е. решения со скобками и без скобок при данных ограничениях в случае монотонного активного нагружения совпадают).

Если же функция изменения напряжений не является гладкой и непрерывной (например, для случая мягкого ступенчатого нагружения), но при этом остается локально ограниченной и может быть разбита на конечный набор участков, напряжение на каждом из которых задаются гладкой и ограниченной функцией, то для каждого из этих участков работает вышеприведенное рассуждение. При этом, исходя из вида задачи Коши для реономной компоненты деформации, несложно видеть, что разрывы локально ограниченной функции, задающей закон изменения напряжений, влияют лишь на гладкость решения, но не влияют на его непрерывность (при этом полная неупругая деформация будет разрывной, но величина разрыва может быть найдена по формуле (1.11)).

Из выполнения условия (1.13) вместе с равенствами $\psi^s(0) = \psi^f(0) = 0$ следует справедливость (1.7), откуда для функций Вейбулла (1.12) получается

$$\beta = \frac{\rho_{D1}}{\rho_{D2}} \leq 1 \quad (1.14)$$

Вводя новые обозначения, которые будут использоваться далее: $s = \sigma / \sigma_1$, $\gamma = \sigma_1 / \sigma_2$, и подставляя их в функцию $\psi_1(\sigma) = \psi^s(\sigma) - \psi^f(\sigma)$, предварительно поделив на нормировочный коэффициент, получаем: $\psi_1 / \rho_{D1} = 1 - \exp(-s^\alpha) - \beta(1 - \exp(-(\gamma s)^\alpha))$. Согласно (1.7), это выражение должно быть неотрицательным при всех значениях s , в том числе и при значениях s , близких к нулю, что достижимо только при

$$\beta \gamma^\alpha \leq 1 \quad (1.15)$$

Далее будем пользоваться результатами работы [27], в которой было доказано, что для выполнения условия (1.13) необходимо и достаточно совместного выполнения условий (1.14) и (1.15). В рамках данной работы будут рассмотрены исключительно модели с $\gamma=1$. Тогда, для выполнения (1.13) и наличия реономных деформаций достаточно выполнение условия (1.14).

2. МЯГКОЕ СТУПЕНЧАТОЕ НАГРУЖЕНИЕ В РЕЖИМЕ МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ

Мягкое ступенчатое нагружение в режиме мартенситной неупругости – процесс нагружения образца из СПФ, находящегося в полностью мартенситном состоянии ($q=1$), контролируемый по напряжениям, при котором на каждом этапе нагружения напряжение от некоторого начального значения σ_0 меняется скачком на заданную величину $\Delta\sigma$ до напряжения $\sigma = \Delta\sigma + \sigma_0$, после чего фиксируется и остаётся неизменным до момента полного затухания заметного роста деформаций (выхода кривой зависимости полных деформаций от времени на горизонтальную асимптоту). Согласно [21] в процессе мягкого ступенчатого нагружения в режиме мартенситной неупругости наблюдается скачок неупругих деформаций и их последующий рост, с течением времени напоминающий ограниченную ползучесть. Более того, в начальные моменты после скачка напряжений деформации растут нелинейно, что недостаточно хорошо согласуется с кривыми, построенными по модели [27] (рис.1, пунктирная линия). Для корректировки определяющих соотношений [27] и получения нелинейного роста неупругих деформаций сразу после скачка напряжений при моделировании процесса было предложено ввести степенную зависимость для скорости роста реономных деформаций. Скачок неупругих деформаций вычисляется в соответствии с (2.11).

Определяющее соотношение для моделирования развития реономных деформаций после скачка, согласно (1.4), можно записать в следующем виде

$$\dot{\varepsilon}^r = k \left(\left\langle \psi^s(\Delta\sigma + \sigma_0) - \psi^f(\Delta\sigma + \sigma_0) - \varepsilon^r \right\rangle \right)^n, \quad \varepsilon^r(t_0) = \varepsilon_0^r \quad (2.1)$$

Здесь ε_0^r – реономная деформация, накопленная в предварительном (предшествующем скачку напряжений) процессе нагружения.

Существует альтернативная форма записи определяющих соотношений, характеризующих развитие реономной деформации после скачка напряжений. Накопленная реономная деформация в предшествующих скачку процессах может быть учтена, если второе из уравнений (1.1) записать в виде

$$\varepsilon^{ne} = \varepsilon^f + \varepsilon^r + \varepsilon_0^r \quad (2.2)$$

Тогда после подстановки (2.2) в (1.3) получаем

$$\dot{\varepsilon}^r = k \left(\left\langle \psi^s(\Delta\sigma + \sigma_0) - \psi^f(\Delta\sigma + \sigma_0) - \varepsilon_0^r - \varepsilon^r \right\rangle \right)^n, \quad \varepsilon^r(t_0) = 0 \quad (2.3)$$

Видим, что постановка задачи для определения полных деформаций с реономной компонентой в виде (2.1) эквивалентна постановке задачи для полных деформаций с реономной компонентой в виде (2.3), так как решением этих задач в полных деформациях при $n>1$ является функция

$$\varepsilon(t) = \frac{\Delta\sigma + \sigma_0}{E} + \psi^s(\Delta\sigma + \sigma_0) - \frac{1}{\sqrt[n-1]{k(n-1)(t-t_0) + \frac{1}{(\psi^s(\Delta\sigma + \sigma_0) - \psi^f(\Delta\sigma + \sigma_0) - \varepsilon_0^r)^{n-1}}}} \quad (2.4)$$

При $n=1$ решение обеих задач также записывается в общем виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\Delta\sigma + \sigma_0}{E} + \psi^s(\Delta\sigma + \sigma_0) - (\psi^s(\Delta\sigma + \sigma_0) - \psi^f(\Delta\sigma + \sigma_0) - \varepsilon_0^r) e^{-k(t-t_0)} \quad (2.5)$$

Таким образом, модель допускает некоторую произвольность в виде учёта накопленной реономной деформации на предварительных стадиях процесса, которая в итоге не влияет на конечное решение в полных деформациях. Без ограничения общности мы далее будем придерживаться вариантов (1.1) и (2.1).

Переходя к вопросу о калибровке модели по экспериментальным данным для процесса мягкого ступенчатого нагружения при скачкообразном увеличении напряжений с уровня σ_0 на $\Delta\sigma$ до уровня $\Delta\sigma + \sigma_0$, исходя из ограничения (1.16) и характерных для СПФ значений параметров $E=28000$ МПа, $\rho_{D1} = 0,08$, а также заданного n , для калибровки остаётся три свободных параметра, а именно: k , β и σ_1 (параметр α для функций (1.12) берём равным 2, что также согласуется с экспериментальными наблюдениями). Калибровку будем производить методом наименьших квадратов с функцией потерь, равной сумме квадратов разности между экспериментальными и модельными значениями полных деформаций в моменты, для которых проводились экспериментальные измерения. Для улучшения сходимости и нахождения глобального минимума функции потерь оценим стартовые значения калибруемых параметров следующим образом:

1) Предположим, что последняя по времени экспериментальная точка (соответствующая времени $T=1800$ с) вышла на асимптоту, и далее, с течением времени, при фиксированном напряжении полные деформации будут изменяться настолько мало, что этими изменениями можно пренебречь. Исходя из данного предположения, мы можем записать следующее соотношение

$$\varepsilon(T) = (\Delta\sigma + \sigma_0) / E + \psi^s(\Delta\sigma + \sigma_0),$$

где неизвестным является только параметр $\sigma_1 > 0$, стоящий в знаменателе экспоненциальной функции (1.12).

2) Предположим, что до скачка напряжений образец бесконечно долго находился на уровне напряжений σ_0 и, согласно определяющим соотношениям модели, приобрёл реономную деформацию $\psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0) = (1 - \beta)\psi^s(\sigma_0)$. Исходя из этого, по экспериментальному значению деформации в самой ранней экспериментальной точке t_0 , мгновенно после скачка напряжений, записывая уравнение для полных деформаций на момент времени t_0

$\varepsilon(t_0) = \frac{\Delta\sigma + \sigma_0}{E} + \beta\psi^s(\Delta\sigma + \sigma_0) + (1 - \beta)\psi^s(\sigma_0)$, подставляя σ_1 (найденное на шаге 1), находим β .

3) Для оценки коэффициента k можно воспользоваться уравнениями (2.4) при $n > 1$ и (2.5) при $n = 1$, записанного для некоторого промежуточного момента t , для которого экспериментальное значение полной деформации – ближайшее к уровню средней деформации, задаваемой как $(\varepsilon(T) - \varepsilon(t_0)) / 2$.

В итоге, используя МНК вкпе с описанным выше методом выбора начальных значений оцениваемых параметров, были получены следующие значения этих параметров¹ (вместе с уже известными значениями $E = 28000$ МПа, $\rho_{D1} = 0,08$ и $\alpha = 2$):

Эксперимент 1: скачкообразное изменение напряжений от 275 МПа до 325 МПа.

$$n=3: k=7,13 \cdot 10^3 \text{ 1/сек}, \beta = 0,8328, \sigma_1=543,52 \text{ МПа}, \gamma=1. \quad (2.6)$$

$$n=1: k=0,0047 \text{ 1/сек}, \beta = 0,8886, \sigma_1=546,94 \text{ МПа}, \gamma=1. \quad (2.7)$$

Эксперимент 2: скачкообразное изменение напряжений от 175 МПа до 225 МПа.

$$n=3: k=10 \cdot 10^3 \text{ 1/сек}, \beta = 0,8567, \sigma_1=464,11 \text{ МПа}, \gamma=1. \quad (2.8)$$

$$n=1: k=0,0047 \text{ 1/сек}, \beta = 0,9031, \sigma_1=467,52 \text{ МПа}, \gamma=1. \quad (2.9)$$

На рис.1 приведены экспериментальные данные зависимости полной деформации ε от времени t [с] (крестообразные символы) совместно с кривыми – результатами моделирования по откалиброванной методом МНК модели (сплошная линия соответствует модельной кривой, построенной для $n=3$, пунктирная линия – для $n=1$). На графиках видно, что модельные кривые, построенные при $n=3$, значительно лучше кривых с $n=1$ аппроксимируют экспериментальные данные, поэтому введение дополнительного степенного параметра в модель [27] обоснованно и даёт значительное улучшение в описании процесса мягкого ступенчатого нагружения после скачка (т.е. исправляет единственный существенный недостаток модели [27]).

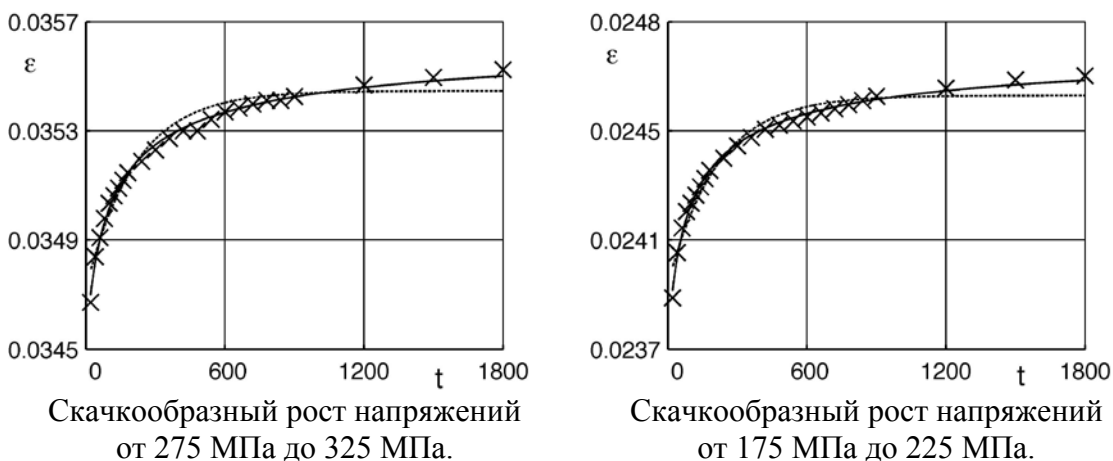


Рис.1.

Следует отметить, что значение $n=3$ было выбрано исходя из того соображения, что для удобства исследования рассматривались исключительно целочисленные значения параметра n , при этом минимальное целочисленное значение параметра n , для которого наблюдается правильная нелинейная асимптотика, достаточно хорошо согласующаяся с экспериментальными

¹ Необходимо отметить, что экспериментальные данные соответствуют разным образцам из СПФ, поэтому различие в коэффициентах k , β и σ_1 ожидаемо.

данными, равно трём. Более того, увеличение степени n даёт незначительное уменьшение функции потерь, при этом стабильность решения сильно ухудшается. По этой причине предпочтение в выборе значения параметра n было отдано $n=3$.

Для всех множеств значений откалиброванных параметров была дополнительно проведена проверка соблюдения условий (1.13): разность производных функций предельно быстрого и медленного процессов для всех множеств является положительной, поэтому при моделировании процессов активного нагружения с помощью откалиброванной модели можно опускать угловые скобки.

В целях сокращения повествования и уменьшения количества приводимых результатов моделирования в виде диаграмм без ограничения общности, чаще будут использоваться модели при $n=3$ и $n=1$ с параметрами (2.6) и (2.7), соответственно. Моделирование будет производиться по откалиброванным определяющим соотношениям в размерном виде (для лучшего понимания характеристик предсказываемых моделью реальных процессов).

3. МЯГКОЕ МОНОТОННОЕ НАГРУЖЕНИЕ С ФИКСИРОВАННОЙ СКОРОСТЬЮ ИЗМЕНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Мягкое нагружение с фиксированной скоростью изменения напряжений – процесс, контролируемый по напряжениям, в котором напряжение изменяется по закону $\sigma = \lambda t$. Подставляя данное соотношение в уравнение для реономной деформации (1.6) и в уравнение для полной деформации (1.9), получаем следующую пару определяющих соотношений

$$\dot{\varepsilon}^r = k \left(\psi_1(\lambda t) - \varepsilon^r \right)^n \quad (3.1)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\lambda}{E} + \frac{\lambda}{H(\lambda t)} + k \left(\psi^s(\lambda t) - \varepsilon + \frac{\lambda t}{E} \right)^n \quad (3.2)$$

В общем случае в квадратурах не удаётся найти решение уравнений (3.1) и (3.2), удовлетворяющее условию $\varepsilon^r(0) = 0$ ($\varepsilon(0) = 0$, соответственно), поэтому дальнейшее исследование будет проводиться численно.

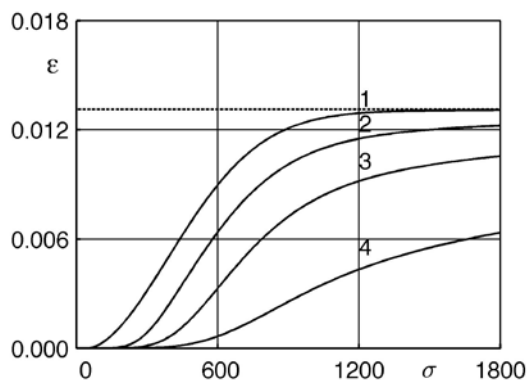


Рис.2.

На рис.2 представлены результаты моделирования развития реономной деформации ε^r от напряжения σ [МПа] в процессе мягкого монотонного нагружения с заданной скоростью изменения напряжений по откалиброванной

модели с параметрами (2.6). Кривые построены для скоростей изменения нагружения $\dot{\lambda}$, равных 0,01 МПа/с (кривая 1), 10 МПа/с (кривая 2), 100 МПа/с (кривая 3), 1000 МПа/с (кривая 4), соответственно. Как и ожидалось, мы видим, что при увеличении скорости нагружения и при заданном срезе по уровню напряжений большим скоростям нагружения соответствуют меньшие реономные деформации, что согласуется с экспериментальными наблюдениями. Также видно, что все кривые стремятся к одной асимптоте (пунктирная линия), располагающейся на уровне $(1-\beta)\rho_{D1}$, что для параметров модели (2.6) соответствует уровню деформаций $=0,0134$.

На рис.3 приведено сравнение результатов моделирования зависимости полной неупругой и реономной деформации $\varepsilon^r, \varepsilon^{re}$ от напряжения σ [МПа] для модели с $n=3$ (с параметрами (2.6), сплошная линия) и $n=1$ (с параметрами (2.7), пунктирная линия) и для скоростей нагружения $\dot{\lambda}$, равных 0,01 МПа/с (кривая 1), 10 МПа/с (кривая 2), 100 МПа/с (кривая 3), 1000 МПа/с (кривая 4).

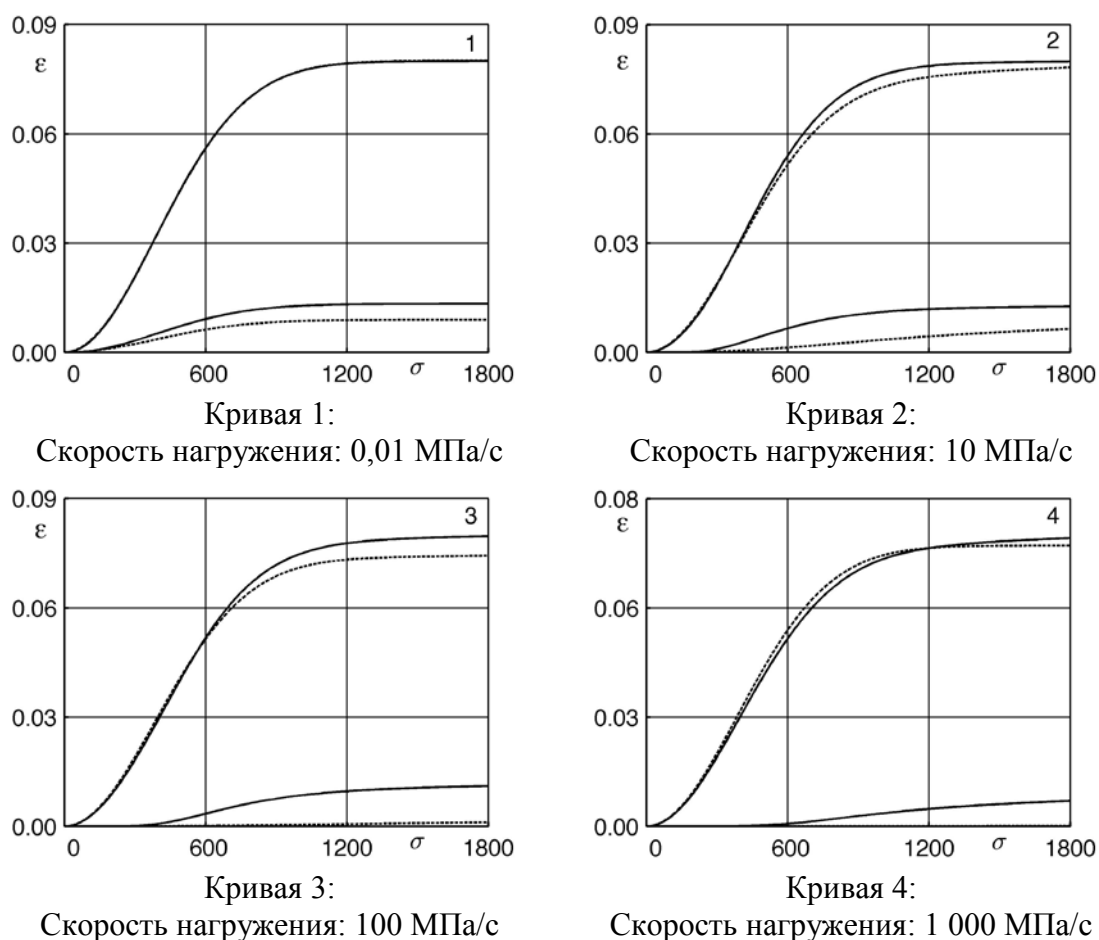


Рис.3.

Так как β в (2.7) выше, чем в (2.6), то асимптота для реономных деформаций в модели при $n=1$ будет ниже, чем при $n=3$. Тем не менее, итоговые неупругие деформации в обоих случаях выходят на один уровень. Из диаграмм на рис.3 видно, что при низких скоростях нагружения (0,01 МПа/с) полные неупругие деформации практически неразличимы для разных значений n . С ростом скорости нагружения (10 и 100 МПа/с) модельные кривые полных деформаций перестают

совпадать, и становится очевидным, что при $n=3$ полная деформация растёт быстрее. При дальнейшем росте тенденция меняется, кривые снова начинают сближаться, и при сверхвысоких скоростях деформирования (взрывное нагружение) рост деформаций при $n=1$ становится более быстрым, чем при $n=3$.

Таким образом, при разных скоростях деформирования более быстрый относительный рост может демонстрировать как модель с $n=1$, так и модель с $n=3$.

В качестве параметров модели, для которой нарушается условие (1.15), можно использовать набор параметров (2.6) с заменой $\gamma = 1$ на $\gamma = 2$. Результаты моделирования зависимости полной, неупругой и реономной деформации $\varepsilon^r, \varepsilon^{ne}, \varepsilon$ от уровня напряжения σ [МПа] (верхняя, средняя и нижняя сплошная линия) для случая модели с угловыми скобками приведены на рис.4. Без угловых скобок в определяющих соотношениях модели рост реономных деформаций при увеличении напряжения в процессе мягкого монотонного нагружения с фиксированной скоростью изменения напряжений перестаёт быть монотонным (пунктирная линия), и, как результат, даже полные неупругие деформации в таком случае перестают быть монотонными (хотя это и менее заметно, чем для $n=1$), что качественно противоречит поведению, наблюдаемому в эксперименте.

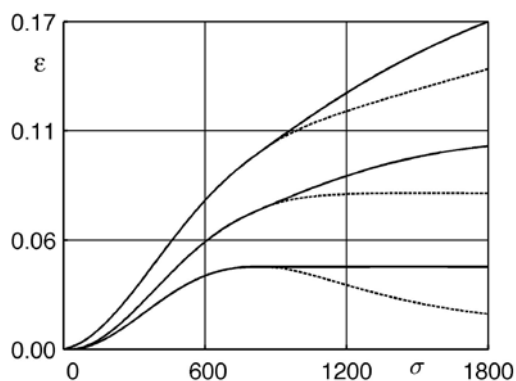


Рис.4.

Подводя итог, следует отметить, что качественно поведение модели с параметрами (2.6), откалиброванными по экспериментальным данным для процесса мягкого ступенчатого нагружения, достаточно хорошо согласуется с экспериментальными наблюдениями, а модельные кривые, построенные по этой модели, не слишком существенно (особенно при малых скоростях нагружения) отличаются от модельных кривых, построенных по модели для $n=1$ с параметрами (2.7).

4. РЕЛАКСАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

В данном разделе рассмотрим моделирование процессов релаксации напряжений после предварительного активного нагружения с конечной скоростью. Пусть образец из СПФ, находящийся в состоянии хаотического мартенсита, нагружен в режиме мартенситной неупругости с монотонно возрастающим напряжением до напряжения σ_0 , в результате чего он приобретает полную деформацию ε_0 . После этого полная деформация фиксируется на уровне

ε_0 . Согласно экспериментальным данным [22], с течением времени наблюдается убывание напряжений при фиксированных полных деформациях и температуре. Падение напряжений ярко выражено сразу после фиксации деформаций, но убывает с течением времени и перестаёт значимо меняться спустя примерно 1 час. Моделированию этого процесса и посвящён данный раздел.

Для процесса релаксации после активного нагружения выполняется

$$\dot{\varepsilon}^f = \begin{cases} 1/H(\sigma) & \text{при } \dot{\sigma} > 0 \\ 0 & \text{при } \dot{\sigma} \leq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\psi^s(\sigma) = \begin{cases} \rho_{D1} \left(1 - \exp\left(-(\sigma/\sigma_1)^\alpha\right) \right) & \text{при } \dot{\sigma} \geq 0 \\ \rho_{D1} \left(1 - \exp\left(-(\sigma_0/\sigma_1)^\alpha\right) \right) = \text{const} & \text{при } \dot{\sigma} \leq 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

При использовании условий (4.1) и (4.2) уравнение (1.8) для полных деформаций ε в процессе релаксации при $\dot{\sigma} \leq 0$ будет записано в виде

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + k \left(\left\langle \psi^s(\sigma_0) - \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \right\rangle \right)^n$$

Если учесть, что $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$, то определяющее соотношение, задающее закон изменения напряжений в процессе релаксации, записывается в форме

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} = -k \left(\left\langle \psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \frac{\sigma}{E} \right\rangle \right)^n \quad (4.3)$$

Без угловых скобок

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} = -k \left(\psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \frac{\sigma}{E} \right)^n \quad (4.4)$$

Решение уравнения (4.4) с начальным условием $\sigma(t_0) = \sigma_0$ записываются в следующем виде

при $n=1$:

$$\sigma(t) = E \left(\varepsilon_0 - \psi^s(\sigma_0) + e^{-k(t-t_0)} \left(\psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \sigma_0 / E \right) \right) \quad (4.5)$$

при $n>1$:

$$\sigma(t) = E \left(\varepsilon_0 - \psi^s(\sigma_0) \right) + \frac{E}{\sqrt[n-1]{k(n-1)(t-t_0) + \frac{1}{\left(\psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \sigma_0 / E \right)^{n-1}}}} \quad (4.6)$$

Чтобы доказать эквивалентность (4.3) и (4.4), нам достаточно проверить, что для решений уравнения (4.4) выполняется неравенство

$$\psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \frac{\sigma(t)}{E} \geq 0 \quad (4.7)$$

(т.е. выражение, стоящее в угловых скобках, неотрицательно), что становится очевидным при подстановке (4.5) и (4.6) в (4.7) с учётом $\psi^f(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E} \leq \varepsilon_0 \leq \psi^s(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E}$ (так как в предварительном процессе, протекающем с конечной скоростью, фиксированное значение полной деформации ε_0 , соответствующее напряжению σ_0 , должно находиться между значениями деформации, соответствующими деформации предельно быстрого и предельно медленного процесса).

Для целей моделирования величину зафиксированной деформации ε_0 удобно представить в виде

$$\varepsilon_0 = \theta \psi^s(\sigma_0) + (1 - \theta) \psi^f(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E},$$

где параметр θ принимает значения $0 \leq \theta \leq 1$ и характеризует степень близости начальной деформации к значениям деформации, достигаемым в предельно быстром ($\theta=0$) и предельно медленном ($\theta=1$) процессе. Важно понимать, что θ характеризует скорость предварительного нагружения, но при этом значение параметра θ , в общем случае, не равно скорости предварительного нагружения.

Переходя к моделированию процесса релаксации напряжений с использованием откалиброванной модели с параметрами (2.6)-(2.9), необходимо отметить, что при данных значениях параметра условие вида

$$\psi_1(\sigma_0) = \psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0) \leq \frac{\sigma_0}{E} \quad (4.8)$$

выполняется для всех наборов параметров и для каждого σ_0 . Выполнение данного условия гарантирует, что минимальное напряжение, достигаемое в процессе предельно быстрого предварительного нагружения $\sigma_{min}^* = \sigma_0 - E(\psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0))$, будет неотрицательным.

На рис.5 (в осях t [с] и σ [МПа]) приведены результаты моделирования процесса релаксации напряжений при $\sigma_0=300$ МПа, $\theta=0,9$ (верхняя пара кривых); 0,5 (средняя пара); 0,1 (нижняя пара) по модели с $n=3$ (с параметрами (2.6), сплошная линия) и модели с $n=1$ (с параметрами (2.7), пунктирная линия). Результаты моделирования качественно согласуются с экспериментальными наблюдениями: при больших значениях параметра θ наблюдается большая релаксация.

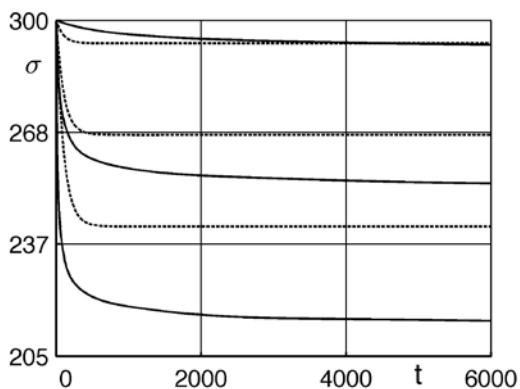


Рис.5.

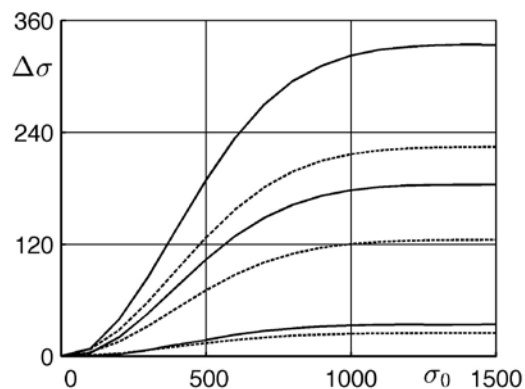


Рис.6.

На рис.6 изображена зависимость величины итоговой релаксации $\Delta\sigma$ [МПа] от начального значения напряжения σ_0 [МПа] при $\theta=0,1$ (верхняя пара кривых); 0,5 (средняя пара); 0,9 (нижняя пара) по модели с $n=3$ (с параметрами (2.6), сплошная линия) и модели с $n=1$ (с параметрами (2.7), пунктирная линия). В рамках (1.16) эта зависимость может быть записана в виде

$$\Delta\sigma(\sigma_0) = E\psi^s(\sigma_0)(1 - \theta - \beta(1 - \theta)) \quad (4.9)$$

Видно, что при такой постановке задачи кривые являются монотонными и стремятся к асимптоте $\Delta\sigma^{asymp}(\theta) = E\rho_{D1}(1 - \theta - \beta(1 - \theta))$. При этом величина релаксации не может превышать значения $\Delta\sigma^{max} = \Delta\sigma^{asymp}(0) = E\rho_{D1}(1 - \beta)$, достигаемого в случае предварительного предельно быстрого нагружения.

На рис.7 приведены диаграммы зависимости величины итоговой релаксации $\Delta\sigma$ [МПа] от начального значения напряжения σ_0 [МПа], достигаемого в результате предварительного мягкого нагружения с фиксированной скоростью роста напряжений λ (для заданного значения σ_0 снизу вверх), равной 10 МПа/с, 100 МПа/с, 1000 МПа/с, 10000 МПа/с, соответственно, по модели с $n=3$ (с параметрами (2.6), сплошная линия) и модели с $n=1$ (с параметрами (2.7), пунктирная линия). Отличие данного процесса от рассмотренных ранее заключается в том, что λ здесь – реальная скорость предварительного монотонного мягкого нагружения. При такой постановке задачи мы видим, что кривые утратили свою монотонность, при этом точка глобального максимума для разных кривых соответствует разным значениям напряжения σ_0 . Такой вид кривых наблюдается и в эксперименте. Это позволяет сделать вывод, что модельные данные качественно хорошо согласуются с экспериментальными данными. Немонотонность наблюдается по той причине, что при заданной скорости нагружения λ с течением времени происходит увеличение показателя θ , что, согласно (4.9), приводит к уменьшению $\Delta\sigma$ в том случае, если эффект падения параметра θ выражен больше, чем эффект роста $\psi^s(\sigma_0)$ при увеличении σ_0 . Стоит отметить, что не удаётся однозначно сказать, выше ли расположен глобальный максимум при $n=1$, чем при $n=3$ (при $\lambda=10$ МПа/с – выше, при $\lambda = 10^4$ МПа/с – ниже).

На рис.8 показана зависимость величины итоговой релаксации $\Delta\sigma$ [МПа] от логарифма нормированной скорости предварительного мягкого монотонного нагружения при $n=3$ и параметрах модели (2.6). Кривые соответствуют значениям σ_0 , равным 100 МПа (кривая 1), 300 МПа (кривая 2), 600 МПа (кривая 3), 900 МПа (кривая 4), 1500 МПа (кривая 5). При этом также наблюдается заметная немонотонность, а наибольшие среди всех приведённых значения $\Delta\sigma$ наблюдаются на кривой, соответствующей 600 МПа. Данные графиков также неплохо качественно соответствуют экспериментальным данным (в эксперименте между указанными переменными наблюдается зависимость, близкая к линейной).

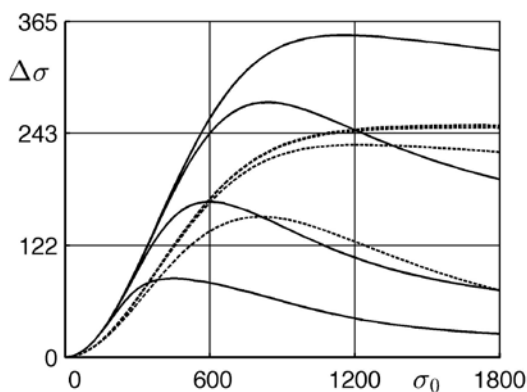


Рис.7.

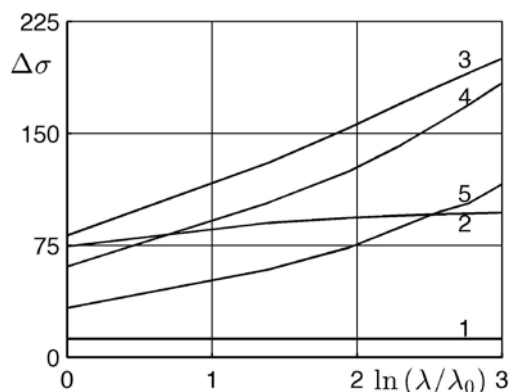


Рис.8.

5. ДИАГРАММА МОНОТОННОГО ЖЁСТКОГО НАГРУЖЕНИЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Пусть полная деформация меняется по закону $\varepsilon = \eta t$, $\eta = const$ (в области малых деформаций это с большой точностью эквивалентно тому, что скорость движения захватов СПФ постоянна). Для такого процесса уравнение (1.8) в полных деформациях записывается в следующем виде (так как процесс активного нагружения происходит в условиях ограничений (1.14) и (1.15), то угловые скобки можно отбросить без изменения решения)

$$\eta = \left(1/E + \psi^{f'}(\sigma)\right) \dot{\sigma} + k(\psi^s(\sigma) + \sigma/E - \eta t)^n$$

В каноническом виде уравнение записывается так

$$\dot{\sigma} = \left(\eta - k(\psi^s(\sigma) + \sigma/E - \eta t)^n\right) / \left(1/E + \psi^{f'}(\sigma)\right) \quad (5.1)$$

В целом, решение уравнения (5.1) не выражается в квадратурах даже в случае $n=1$, поэтому далее будут приведены результаты численного построения решения (5.1) с начальными условиями $\sigma(0) = 0$.

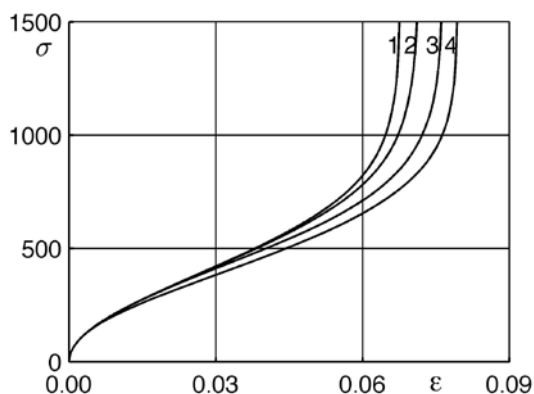
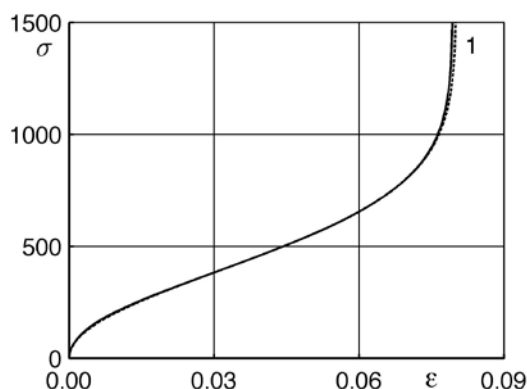


Рис.9.

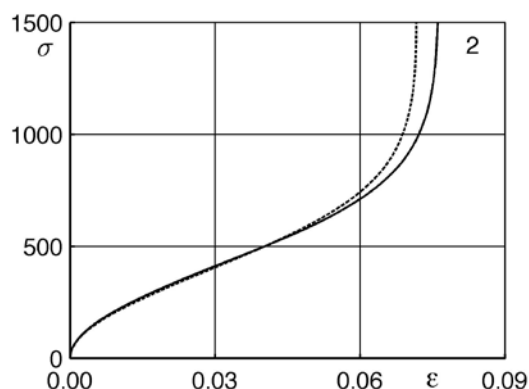
На рис.9 приведены результаты численного моделирования зависимости напряжения σ [МПа] от полной неупругой деформации $(\eta t - \sigma(t)/E)$ для модели с $n=3$ и параметрами (2.6) в процессе жёсткого нагружения со скоростями деформирования $\eta = 10^{-4}$ 1/с (кривая 4), $\eta = 10^{-2}$ 1/с (кривая 3), $\eta = 0.1$ 1/с (кривая 2), $\eta = 1$ 1/с (кривая 1).

Результаты численного моделирования также качественно неплохо согласуются с экспериментальными данными: при заданном уровне напряжений большим скоростям деформации соответствуют меньшие уровни деформации.

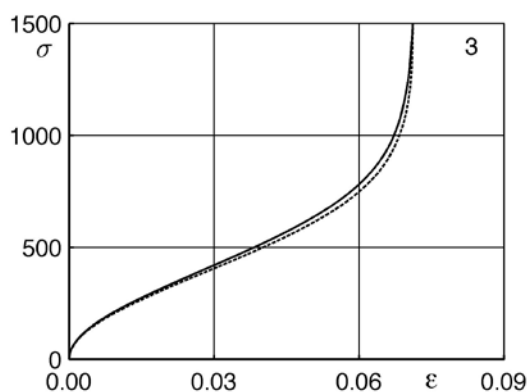
При замене в (2.6) значения параметра $\gamma = 1$ на $\gamma = 2$ (т.е. при нарушении условия (1.15)) модель без угловых скобок даёт парадоксальный результат: при некотором заданном уровне напряжения большему значению скорости деформирования соответствует большее значение деформации, что противоречит экспериментальным данным.



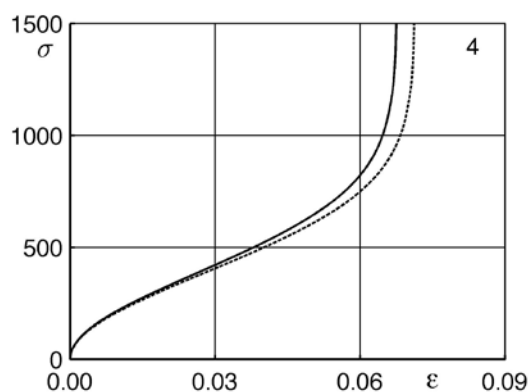
Кривая 1: Скорость изменения полной деформации: 0,0001 1/с.



Кривая 2: Скорость изменения полной деформации: 0,01 1/с.



Кривая 3: Скорость изменения полной деформации: 0,1 1/с.



Кривая 4: Скорость изменения полной деформации: 1 1/с.

Рис.10.

На рис.10 представлено сравнение результатов моделирования процесса жёсткого нагружения с постоянной скоростью деформации при $n=3$ (с параметрами (2.6), сплошная линия) и $n=1$ (с параметрами (2.7), пунктирная линия) для скоростей деформирования $\eta = 10^{-4}$ 1/с (кривая 1), $\eta = 10^{-2}$ 1/с (кривая 2), $\eta = 0.1$ 1/с (кривая 3), $\eta = 1$ 1/с (кривая 4). При малых скоростях (до $\eta = 10^{-4}$ 1/с) фигуры для $n=1$ и $n=3$ практически неразличимы, и при увеличении скорости (до $\eta = 10^{-2}$ 1/с) решение для $n=3$ заметно быстрее выходит на асимптоту, чем для $n=1$. При дальнейшем увеличении скорости можно наблюдать обратную динамику: кривые начинают сходиться, двигаясь ближе друг к другу ($\eta = 0,1$ 1/с), и в итоге при сверхвысоких скоростях ($\eta = 1$ 1/с) выход на асимптоту происходит раньше при $n=1$, чем при $n=3$.

6. СЛУЧАЙ РАЗГРУЗКИ ПОСЛЕ МОНОТОННОГО НАГРУЖЕНИЯ

Как и в работе [27], в данном исследовании также возникает вопрос о том, может ли рассматриваемая модель (1.9), не использующая угловых скобок, корректно описать эффект разгрузки и дать такое же решение, что и модель (1.8) с угловыми скобками.

Для исследования этого вопроса сформулируем следующую задачу: пусть на участке $0 \leq t \leq t_1$ происходило монотонное активное нагружение до уровня

напряжений $\sigma(t_1) = \sigma^{max} = \sigma_0$, а на участке $t_1 \leq t \leq t_2$ – разгрузка, заданная функцией изменения напряжений $\sigma(t)$ такой, что $\sigma(t) \leq \sigma^{max}$ в каждый момент времени $t_1 \leq t \leq t_2$ (т.е. процесс, протекающий на второй стадии, не является активным). При этом предполагается, что при уменьшении напряжений упругая разгрузка происходит как для предельно медленных, так и для предельно быстрых процессов, причём с одним и тем же модулем, таким образом, что на этапе разгрузки или нагружения вне активных процессов $\psi_1(\sigma) = const = \psi_1(\sigma^{max})$, $\psi_1'(\sigma) = 0$. Тогда для $t \in (t_1, t_2)$, при решении (1.6) с начальными условиями $\varepsilon^r(t_1) = \varepsilon_0$ для реономных деформаций и при переходе к полным деформациям по формуле (1.1), получаем
при $n=1$:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \psi^s(\sigma_0) - e^{-k(t-t_1)} (\psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \sigma_0 / E) \quad (6.1)$$

при $n > 1$:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \psi^s(\sigma_0) - \frac{1}{\sqrt[n-1]{k(n-1)(t-t_1) + \frac{1}{(\psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \sigma_0 / E)^{n-1}}}} \quad (6.2)$$

Для точки t_1 – конца процесса монотонного нагружения – при условии выполнения (1.13) будет верным неравенство $\psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \frac{\sigma_0}{E} \geq 0$. Исходя из этого факта, очевидно, что для решений (6.1) и (6.2) также будет выполняться $\psi^s(\sigma(t)) - \varepsilon(t) + \frac{\sigma(t)}{E} \geq 0$ для каждого $t \geq t_1$. Таким образом можно сделать вывод, что вне активных процессов (при разгрузке, сменяющейся нагружением, до максимального значения напряжений σ_0) решения уравнений (1.8) и (1.9) полностью эквивалентны.

Из этого рассуждения, а также анализа, проведённого для случая активного монотонного процесса, следует достаточно определённый вывод: при соблюдении условия (1.13) решения уравнений (1.8) и (1.9) полностью эквивалентны как при процессе активного нагружения, так и при разгрузке и последующем нагружении до достижения уровней активного процесса. То есть, если процесс можно разбить на подпроцессы, каждый из которых является или активным и монотонным, задаваемым гладкой локально ограниченной функцией нагружения, или же не является активным ни в один момент времени, то для каждого такого процесса, при выполнении ограничений (1.14) и (1.15), угловые скобки в модели могут быть убраны без потери смысла.

Резюмируя, можно сказать, что при решении практически важных задач достаточно проверить выполнение условий (1.14) и (1.15). Если условия выполнены, то для последующего моделирования реального процесса можно использовать модель (1.9) без угловых скобок, что значительно упрощает дальнейший анализ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что предлагаемый аналог вязкопластической модели со степенной зависимостью для скорости роста реономной деформации качественно лучше (по сравнению с моделью [27]) описывает экспериментальные данные для процесса мягкого ступенчатого нагружения. При этом в размерных переменных качество описания процессов мягкого и жёсткого монотонного нагружения, релаксации напряжений и монотонной разгрузки не ухудшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mukherjee K., Sircar S., Dahotre N.B. *Thermal effect associated with stress-induced martensitic transformation in TiNi alloy* // Mater. Sci. Eng. – 1985. – Vol.74. – Pp.75-84.
2. Shaw J.A., Kyriakides S. *Thermomechanical aspects of TiNi* // J. Mech. Phys. Solids. – 1995. – Vol.43. – No.8. – Pp.1243-1281.
3. Shaw J.A., Kyriakides S. *On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a TiNi alloy* // Acta Mater. – 1997. – Vol.45. – No.2. – Pp.683-700.
4. Leo P.H., Shield T.W., Bruno O.P. *Transient heat transfer effects on the pseudoelastic behavior of shape memory wires* // Acta Metall. Mater. – 1993. – Vol.41. – No.8. – Pp.2477-2485.
5. Попов Н.Н., Мартыянов В.А. *Сопротивление деформированию никелида титана ТННК при скоростях деформации 10^{-3} – 10^3 сек⁻¹* // Металловедение и термическая обработка металлов. – 1993. – №11. – С.26-28.
6. Chen W.W., Wu Q.P., Kang J.H., Winfree N.A. *Compressive superelastic behavior of TiNi shape memory alloy at strain rates 0.001-750 s⁻¹* // Int. J. Solids and Structure. – 2001. – Vol.38. – No.50-51. – Pp.8989-8998.
7. Попов Н.Н., Брагов А.М., Каганова И.И., Ломунов А.К., Поляков Л.В. *Влияние температурно-скоростных условий деформирования на механические характеристики сплава с памятью формы системы Ti-Ni-Fe* // 47-я Межд. конф. «Актуальные проблемы прочности». Материалы. – 2008. – Нижний Новгород. – Ч.2. – С.114-116.
8. Helm D., Haupt P. *Thermomechanical representation of the multiaxial behavior of shape memory alloys* // SPIE Conference Proceedings. Smart Structure and Materials; Active Materials: Behavior and Mechanics. – 2002. – Vol.4699. – Pp.343-354.
9. Helm D., Haupt P. *Shape memory behavior: modeling within continuum thermodynamics* // Int. J. Solids Struct. – 2003. – Vol.40. – Pp.827-849.
10. Nemat-Nasser S., Choi J.Y., Guo W.G., Isaacs J.B. *High strain-rate, small strain response of NiTi shape-memory alloy* // J. Eng. Mater. Technol. – 2005. – Vol.127. – Pp.83-89.
11. Grabe C., Bruhns O.T. *On the viscous and strain rate dependent behavior of polycrystalline NiTi* // Int. J. Solids and Structure. – 2008. – Vol.45. – Pp.1876-1895.
12. Iadicola M.A., Shaw J.A. *Rate and thermal sensitivities of unstable transformation behavior in a shape memory alloy* // Int. J. of Plasticity. – 2004. – Vol.20. – Pp.577-605.

13. Van Humbeeck J., Delaey L. *The influence of strain-rate amplitude and temperature on the hysteresis of a pseudoelastic Cu-Zn-Al single crystal* // J. Phys. – 1981. – Vol.42. – Pp.1005-1007.
14. Vitiello A., Giorleo G., Morace R.E. *Analysis of thermomechanical behaviors of Nitinol wires with high strain rates* // Smart Mater. Struct. – 2005. – Vol.14. – Pp.215-221.
15. Zhang X.H., Feng P., He Y.J., Yu T.X. Sun Q.P. *Experimental study on rate dependence of macroscopic domain and stress hysteresis in TiNi shape memory alloy strips* // Int. J. Mech. Sci. – 2010. – Vol.52. – Pp.1660-1670.
16. Schmidt I. *A phenomenological model for superelastic NiTi wires based on plasticity with focus on strain – rate dependency caused by temperature* // J. Eng. Mater. Technol. – 2006. – Vol.128. – Pp.279-284.
17. Daunanda G.N., Subba Rao M. *Effect of strain rate on properties of superelastic NiTi thin wires* // Mater. Sci. Eng. A. – 2008. – Vol.486. – Pp.96-103.
18. Lin P., Tobushi H., Tanaka K., Hattori T., Ikai A. *Influence of strain rate on deformation properties of TiNi shape memory alloy* // JSME Int. J. Ser. A. Mech Mater. Eng. – 1996. – Vol.39. – No.1. – Pp.117-123.
19. Tobushi H., Shimeno Y., Hashisuka T., Tanaka K. *Influence of strain rate on superelastic properties of TiNi shape memory alloy* // Mech. Mater. – 1998. – Vol.30. – Pp.141-150.
20. Tobushi H., Takata K., Shimeno Y., Nowacki W.K., Gadaj S.P. *Influence of strain rate on superelastic behavior of TiNi shape memory alloy* // Proc. Inst. Mech. Eng. Part L. J. Mater.: Design. Appl. – 1999. – Vol.213. – No.2. – Pp.93-102.
21. Мовчан А.А., Казарина С.А., Тант Зин Аунг. *Реономные свойства сплавов с памятью формы, проявляемые в опытах на мартенситную неупругость и сверхупругость* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №3. – С.305-311.
22. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Релаксация напряжений в сплавах с памятью формы после нагружения в режиме мартенситной неупругости* // Деформация и разрушение материалов. – 2013. – №2. – С.17-23.
23. Helm D. *Thermomechanics of martensitic phase transition in shape memory alloys-I. Constitutive theories for small and large deformations* // J. Mech. Mater. Struct. – 2007. – Vol.2. – No.1. – Pp.87-112.
24. Prahlad H., Chopra I. *Development of a strain-rate dependent model for uniaxial loading of SMA wires* // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 2003. – Vol.14. – Pp.429-442.
25. Мовчан А.А., Климов К.Ю. *Моделирование реономных свойств сплавов с памятью формы.* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №2. – С.255-267.
26. Мовчан А.А., Климов К.Ю. *Модель реономного поведения сплавов с памятью формы, использующая гипотезы о склерономности предельно медленных и предельно быстрых процессов нагружения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №4. – С.508-522.
27. Мовчан А.А., Климов К.Ю. *Аналог вязкопластических определяющих соотношений для описания реономных свойств сплавов с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №1. – С.159-176.
28. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования,*

- определяющие соотношения, решение краевых задач // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
29. Мовчан А.А., Климов К.Ю., Сильченко Т.Л. Влияние реономных свойств сплавов с памятью формы на устойчивость стержня из этих материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т.19. – №2. – С.262-277.
30. Мовчан А.А., Казарина С.А., Мишустин И.В., Мовчан И.А. Термодинамическое обоснование модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Деформация и разрушение материалов. – 2009. – №8. – С.2-9.
31. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – №1. – С.37-53.
32. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – №2. – С.78-95.

REFERENCES

1. Mukherjee K., Sircar S., Dahotre N.B. *Thermal effect associated with stress-induced martensitic transformation in TiNi alloy*. Mater. Sci. Eng., 1985, Vol.74, Pp.75-84.
2. Shaw J.A., Kyriakides S. *Thermomechanical aspects of TiNi*. J. Mech. Phys. Solids, 1995, Vol.43, No.8, Pp.1243-1281.
3. Shaw J.A., Kyriakides S. *On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a TiNi alloy*. Acta Mater., 1997, Vol.45, No.2, Pp.683-700.
4. Leo P.H., Shield T.W., Bruno O.P. *Transient heat transfer effects on the pseudoelastic behavior of shape memory wires*. Acta Metall. Mater., 1993, Vol.41, No.8, Pp.2477-2485.
5. Popov N.N., Mart'ianov V.A. *Soprotivlenie deformirovaniu nikelida titana TNiK pri skorostiakh deformatsii $10^{-3} - 10^3 \text{ sec}^{-1}$ [Titanium nickelide TNiK deformation resistance under strain rate of $10^{-3} - 10^3 \text{ sec}^{-1}$]*. Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov, 1993, No.11, Pp.26-28.
6. Chen W.W., Wu Q.P., Kang J.H., Winfree N.A. *Compressive superelastic behavior of TiNi shape memory alloy at strain rates $0.001-750 \text{ s}^{-1}$* . Int. J. Solids and Structure, 2001, Vol.38, No.50-51, Pp.8989-8998.
7. Popov N.N., Bragov A.M., Kaganova I.I., Lomunov A.K., Poliakov L.V. *Vliyanie temperaturno-skorostnykh uslovii deformirovaniia na mekhanicheskie kharakteristiki splava s pamiat'iu formy sistemy Ti-Ni-Fe [Thermo-speed straining conditions influence on mechanical characteristics of Ti-Ni-Fe systems' shape memory alloys]*. 47 Mezhdunarodnaia konferentsiia «Aktual'nye problemy prochnosti». Materialy. – 2008. – Nizhnii Novgorod. – Iss.2. – Pp.114-116.
8. Helm D., Haupt P. *Thermomechanical representation of the multiaxial behavior of shape memory alloys*. Proc. SPIE. Smart Structure and Materials; Active Materials: Behavior and Mechanics, 2002, Vol.4699, Pp.343-354.
9. Helm D., Haupt P. *Shape memory behavior: modeling within continuum thermodynamics*. Int. J. Solids Struct., 2003, Vol.40, Pp.827-849.

10. Nemat-Nasser S., Choi J.Y., Guo W.G., Isaacs J.B. *High strain-rate, small strain response of NiTi shape-memory alloy*. J. Eng. Mater. Technol., 2005, Vol.127, Pp.83-89.
11. Grabe C., Bruhns O.T. *On the viscous and strain rate dependent behavior of polycrystalline NiTi*. Int. J. Solids and Structure, 2008, Vol.45, Pp.1876-1895.
12. Iadicola M.A., Shaw J.A. *Rate and thermal sensitivities of unstable transformation behavior in a shape memory alloy*. Int. J. of Plasticity, 2004, Vol.20, Pp.577-605.
13. Van Humbeeck J. Delaey L. *The influence of strain-rate amplitude and temperature on the hysteresis of a pseudoelastic Cu-Zn-Al single crystal*. J. Phys., 1981, Vol.42, Pp.1005-1007.
14. Vitiello A., Giorleo G., Morace R.E. *Analysis of thermomechanical behaviors of Nitinol wires with high strain rates*. Smart Mater. Struct., 2005, Vol.14, Pp.215-221.
15. Zhang X.H., Feng P., He Y.J., Yu T.X. Sun Q.P. *Experimental study on rate dependence of macroscopic domain and stress hysteresis in TiNi shape memory alloy strips*. Int. J. Mech. Sci., 2010, Vol.52, Pp.1660-1670.
16. Schmidt I. *A phenomenological model for superelastic NiTi wires based on plasticity with focus on strain – rate dependency caused by temperature*. J. Eng. Mater. Technol., 2006, Vol.128, Pp.279-284.
17. Daunanda G.N., Subba Rao M. *Effect of strain rate on properties of superelastic NiTi thin wires*. Mater. Sci. Eng., A, 2008, Vol.486, Pp.96-103.
18. Lin P., Tobushi H., Tanaka K., Hattori T., Ikai A. *Influence of strain rate on deformation properties of TiNi shape memory alloy*. JSME Int. J. Ser. A, Mech. Mater. Eng., 1996, Vol.39, No.1, Pp.117-123.
19. Tobushi H., Shimeno Y., Hashisuka T., Tanaka K. *Influence of strain rate on superelastic properties of TiNi shape memory alloy*. Mech. Mater., 1998, Vol.30, Pp.141-150.
20. Tobushi H., Takata K., Shimeno Y., Nowacki W.K., Gadaj S.P. *Influence of strain rate on superelastic behavior of TiNi shape memory alloy*. Proc. Inst. Mech. Eng. Part L. J. Mater.: Design. Appl., 1999, Vol.213, No.2, Pp.93-102.
21. Movchan A.A., Kazarina S.A., Tant Zin Aung. *Reonomnye svoistva splavov s pamiat'iu formy, proiavljaemye v opytakh na martensitnuiu neuprugost' i sverkhuprugost' [Rheonomic properties of shape memory alloys, registered in the martensite inelasticity and super-elasticity experiments]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2010, Vol.16, No.3, Pp.305-311.
22. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Stress relaxation in shape memory alloys after loading under martensitic inelasticity conditions*. Russian metallurgy (Metally), 2014, No.4, Pp.293-298.
23. Helm D. *Thermomechanics of martensitic phase transition in shape memory alloys- I. Constitutive theories for small and large deformations*. J. Mech. Mater. Struct., 2007, Vol.2, No.1, Pp.87-112.
24. Prahlad H., Chopra I. *Development of a strain-rate dependent model for uniaxial loading of SMA wires*. J. Intell. Mater. Syst. Struct., 2003, Vol.14, Pp.429-442.
25. Movchan A.A., Klimov K.Yu. *Simulation of rheonomic properties of shape memory alloys*. Composites: Mechanics, Computations, Applications, 2011, Vol.2, Iss.3, Pp.171-185.
26. Movchan A.A., Klimov K.Iu. *Model' reonomnogo povedeniia splavov s pamiat'iu formy, ispol'zuiushchaia gipotezy o skleronomnosti predel'no medlennykh i predel'no bystrykh protsessov nagruzheniia [Rheonomic behaviour shape memory alloys model using hypothesis of scleronomous limiting slow and limiting fast*

- processes*]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2011, Vol.17, No.4, Pp.508-522.
27. Movchan A. A., Klimov K. Iu. *Analog viazkoplasticheskikh opredel'aiushchikh sootnoshenii dlia opisaniia reonomnykh svoistv splavov s pamiat'iu formy [Viscoplastic constitutive equations analogue for description of shape memory alloys rheonomic properties]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2014, Vol.20, No.1, Pp.159-176.
28. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems*. *Physical Mesomechanics*, 2012, Vol.15, No.3-4, Pp.214-223.
29. Movchan A.A., Klimov K.Iu., Sil'chenko T.L. *Vliianie reonomnykh svoistv splavov s pamiat'iu formy na ustoychivost' sterzhnia iz etikh materialov [Influence of rheonomic properties of shape memory alloys on stability of beam from these materials]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2013, Vol.19, No.2, Pp.262-277.
30. Movchan A.A., Kazarina S.A., Mishustin I.V., Movchan I.A. *Termodinamicheskoe obosnovanie modeli nelineinogo deformirovaniia splavov s pamiat'iu formy pri fazovykh i strukturnykh prevrashcheniiakh [Thermodynamic explanation of shape memory alloys nonlinear straining under phase and structural transformations]*. *Deformatsiia i razrushenie materialov*, 2009, No.8, Pp.2-9.
31. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. *Mechanics of Solids*, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.
32. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. *Mechanics of Solids*, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.

Поступила в редакцию 31 мая 2016 года.²

Сведения об авторе:

Климов Кирилл Юрьевич – асп., Механико-математический факультет, МГУ им.М.В.Ломоносова, г. Москва, Россия