

УДК 532.546

## ОЦЕНКА МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГИПЕРУПРУГИХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ С МАЛЫМИ ДОБАВКАМИ НАНОРАЗМЕРНЫХ ЧАСТИЦ НАПОЛНИТЕЛЕЙ И УЧЁТ ВЛИЯНИЯ ИХ АГРЕГАЦИИ<sup>1</sup>

Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б., Карнет Ю.Н.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Статья посвящена развитию методики оценки эффективных деформационных свойств наполненных полимерных гиперупругих композитов с учётом межфазного контактного слоя, размеры которого определяются масштабными факторами (характерным размером – микроразмерные включения минерального наполнителя, которые представляют собой как микроразмерные частицы, так и агрегаты наноразмерных частиц, и наноразмерные частицы наполнителя) и структурой поверхности, определяющей размеры контактного слоя. Идентификация свойств поверхности осуществлялась методами фрактального анализа, что позволило вычислить фрактальные размерности поверхности наполнителя на основе экспериментальных данных и оценить размер межфазного слоя. Идентификация свойств гиперупругой матрицы осуществлялась на основе семейства потенциалов, учитывающих эффект изменения жесткости полимерного материала при растяжении. Сформулирована численная методика определения эффективных механических характеристик гиперупругого композита с наполнителем сферической формы, основанная на решении периодических задач на ячейке с включением, моделирующих условия одноосного растяжения и чистого сдвига. На основе этой методики и экспериментальных данных по исследованию свойств наполнителя, матрицы и контактного слоя, полученных в ИПРИМ РАН, было показано, что шунгитовый наполнитель микро- и наноразмерного масштаба увеличивает эффективную жёсткость композитного материала. Также расчётами было показано, что в эластомерных композитах матрица более жёсткая нежели «чистый» материал, который используется при изготовлении таких композитных материалов в качестве матрицы.

**Ключевые слова:** полимерный композит; эластомерная матрица; дисперсный наполнитель; межфазный слой; шунгит; агрегаты частиц; гиперупругость; метод асимптотического усреднения уравнений с быстро-осциллирующими коэффициентами; аналитические и численные методы решения задачи на ячейке периодичности; эффективные механические свойства структурно-неоднородных материалов

## EVALUATION OF MECHANICAL PROPERTIES OF HYPERELASTIC POLYMER COMPOSITES WITH SMALL ADDITIONS OF NANOSIZED FILLER PARTICLES AND THE EFFECTS OF THEIR AGGREGATION

Vlasov A.N., Volkov-Bogorodsky D.B., Karnet Yu.N.

*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00457.

## ABSTRACT

The article is devoted to the development of a method for assessment of the effective deformation properties of the polymeric hyperelastic composites with the interphase contact layer. The dimension of contact layer is determined by scale factors (i.e. a characteristic dimension of the inclusion of micro-sized mineral filler, which is a composition of micro-sized particles and aggregate assembly of nanoscale particles, or properly of nanoscale particles of filler) and by the surface structure that determines the dimension of contact layer. Identification of the surface properties is performed by the method of fractal analysis that allowed to calculate the fractal dimension of the filler surface on the basis of experimental data and to estimate the size of the interphase layer. Identification of the properties of the hyperelastic matrix is carried out on the basis of a family of potentials that take into account the effect of the polymer material stiffness changing under tension. A numerical method for determining the effective mechanical properties of hyperelastic composites with dispersed spherical filler is formulated. This method is based on the solution of the series of periodic problems on the cell with the inclusion, which simulate conditions of uniaxial tension and pure shear deformation. Based on this technique and related experimental data of properties of filler, matrix and contact layer obtained in IPRIM RAS, it was shown that the shungite filler of micro- and nanoscale dimension increases the effective rigidity of the composite material. These calculations have also shown that in elastomer composites the matrix is more rigid than in the "pure" material, which is used as a matrix in the production of such composite materials.

**Keywords:** polymer composite; an elastomeric matrix; dispersed filler; interphase layer; schungite; aggregates of particles; hyper elastic; method of asymptotic homogeneities; analytical and numerical methods of solving the problem on the periodicity cell; effective mechanical properties of heterogeneous materials

## ВВЕДЕНИЕ

В работе развивается методика определения эффективных характеристик механических свойств композитных материалов на основе гиперупругой полимерной матрицы и дисперсного наполнителя. В её основе лежит одна из ключевых задач в технической реализации метода асимптотического усреднения нелинейных дифференциальных уравнений с быстро-осциллирующими коэффициентами, соответствующих периодическим средам, а именно, решение периодических задач на ячейке. Предлагаемая методика основывается на численном моделировании процесса деформирования под нагрузкой образца композитного материала на основе эластомерной матрицы с периодическими граничными условиями [1-3].

Следует отметить, что дисперсный наполнитель может относиться к микронному, субмикронному или наноразмерному масштабным уровням, что приводит к проявлению масштабных эффектов таких, как усиление жесткостных и прочностных характеристик композитных материалов [1,2]. Микронный и особенно наноразмерный наполнитель обычно характеризуется наличием развитого межфазного слоя, который оказывает общее усиливающее действие. В эластомерных композитах матрица более жёсткая нежели «чистый» материал, из которого сделана матрица, т.к. на неё оказывает усиливающее действие нанодисперсный наполнитель, что характеризуется увеличением её жесткостных свойств в композиции с наполнителем [4]. Эти факторы необходимо учитывать при использовании аналитических и численных методов оценки эффективных характеристик.

В настоящей работе сформулирована схема параметрического усреднения гиперупругих композитных материалов, которая реализуется в необходимости решения двух основных задач на ячейке периодичности для функций быстрых переменных первого порядка при одноосном растяжении и чистом сдвиге образца полимерной матрицы с включением. На основе численного решения этих задач определяются эффективные характеристики механических свойств композитного материала: касательный модуль Юнга  $E$  и касательный модуль сдвига  $G$ , как средние значения, связывающие компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций. В работах [3,5-7] было показано, что параметрический метод асимптотического усреднения является адекватным и математически обоснованным методом для моделирования физических процессов в структурно-неоднородных средах. Традиционная схема метода асимптотического усреднения была несколько модифицирована в работе [3] и сформулирована для физически нелинейных материалов за счёт расширенной трактовки функций быстрых переменных в параметрическом пространстве. Эта схема применяется в настоящей работе к геометрически нелинейным гиперупругим материалам, для которых параметром является удлинение при растяжении или чистом сдвиге.

Масштабные эффекты, обусловленные наличием межфазного слоя, моделируются непосредственно, путём введения в модель промежуточного межфазного слоя для дисперсных включений (рис.1).

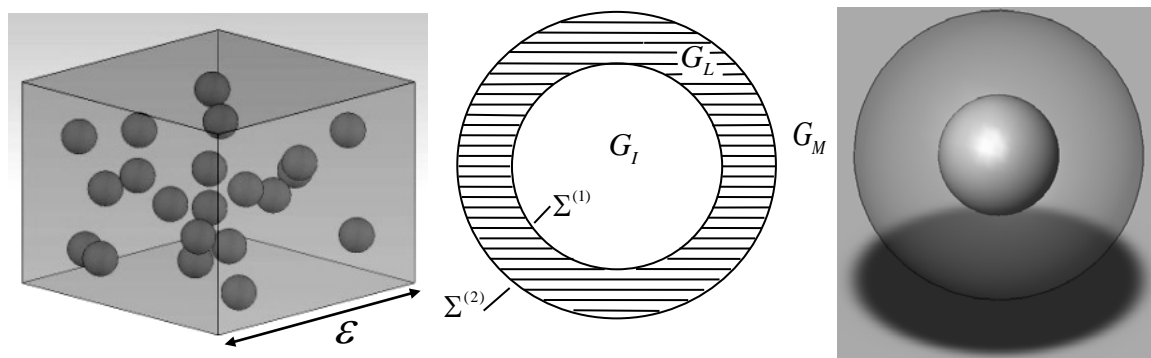


Рис.1. Типовой элемент структуры композитного материала на основе полимерной матрицы и межфазные слои, окружающие включение.

Геометрические и физические параметры межфазного слоя определяются на основе экспериментальных данных с использованием методов фрактального анализа межфазной зоны между включением и матрицей. Такой подход использовался, в частности, в работе [2] для классической модели упругого материала, где в зависимости от размера включений с переменным межфазным слоем был смоделирован масштабный эффект усиления жесткостных характеристик композитного материала, хорошо согласующийся с экспериментальными данными.

В данной работе изменение деформационных свойств матрицы исследуемых эластомерных композитов, которые зависят от технологии их приготовления и от относительного упорядоченного выстраивания полимерных волокон между включениями, учитывались соответствующим заданием коэффициентов упругого потенциала модифицированной матрицы.

## 1. АППРОКСИМАЦИЯ ПОТЕНЦИАЛА ГИПЕРУПРУГОЙ МАТРИЦЫ

В качестве матрицы композитного материала рассматривается несжимаемый гиперупругий эластомер (бутадиен стирольный каучук), который описывается в главных осях тензора деформаций потенциалом упругой энергии  $U$ , зависящий от первого инварианта тензора деформаций  $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ , где  $\lambda_i = 1 + \delta_i$ , а  $\delta_i = (dx'_i - dx_i)/dx_i$  элементарные относительные удлинения ( $i=1,2,3$ ). В настоящей работе потенциал деформаций [8] представлен в экспоненциальной форме, позволяющей эффективно учитывать эффект нелинейного изменения жёсткости материала при растяжении (эффект Пейна)

$$U = E_1 \frac{I_1 - 3}{2} + \frac{E_2}{E_3} \sqrt{I_1 - 3} + \frac{E_2}{E_3} \left( e^{-E_3 \sqrt{I_1 - 3}} - 1 \right) \quad (1)$$

коэффициенты  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  вычисляются на основе экспериментальных данных по растяжению эластомерного материала, используемого в композите с нано- и микроразмерным минеральным наполнителем (шунгитом).

Из дальнейшего изложения будет видно, что выбор зависимости для аналитического представления упругого потенциала в форме (1) даёт возможность с высокой степенью точности аппроксимировать поведение (напряжённо-деформированное состояние) под нагрузкой, как «чистого» материала матрицы, так и эластомерного композита.

В качестве образцов исходного материала рассматривались полоски ненаполненного бутадиен-стирольного каучука, которые подвергались одноосному растяжению (рис.2). В результате, в качестве исходных данных для аппроксимации потенциала (1) получали таблицу  $\{\lambda_i, \sigma_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , где  $\lambda_i$  – относительное удлинение, а  $\sigma_i$  – соответствующее этому удлинению техническое напряжение, т.е. сила растяжения, поделённая на исходную площадь сечения (без учёта изменения площади сечения при одноосной деформации).

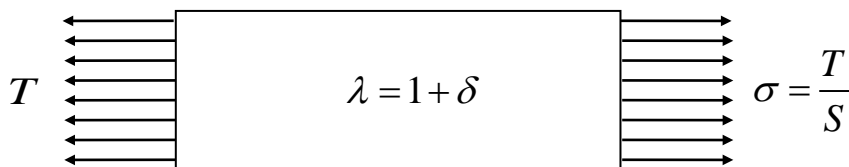


Рис.2. Схема одноосного растяжения образца гиперупругого материала.

Соответственно при одноосном растяжении инвариант  $I_1$  и технические напряжения, соответствующие потенциалу (1), раскрываются следующим образом

$$I_1 = \lambda_i^2 + 2/\lambda_i, \quad \sigma_i = \frac{\partial U}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_i} = \left( E_1 + \frac{E_2}{E_3} \frac{1 - e^{-E_3 \sqrt{\lambda_i^2 + 2/\lambda_i - 3}}}{\sqrt{\lambda_i^2 + 2/\lambda_i - 3}} \right) (\lambda_i - 1/\lambda_i^2) \quad (2)$$

При аппроксимации исходных данных варьируются параметры  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$ ; поскольку из них два первых входят в формулу (2) линейно, то они определяются методом наименьших квадратов при фиксированном  $E_3$ . Для этого вычисляются соответствующие нормы и скалярные произведения

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{i=1}^N (\lambda_i - 1/\lambda_i^2)^2, & H_1 &= \sum_{i=1}^N \sigma_i (\lambda_i - 1/\lambda_i^2), \\
A_2 &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{1 - e^{-E_3 \sqrt{\lambda_i^2 + 2/\lambda_i - 3}}}{E_3} \right)^2 \frac{(\lambda_i - 1/\lambda_i^2)^2}{\lambda_i^2 + 2/\lambda_i - 3}, \\
H_2 &= \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i (\lambda_i - 1/\lambda_i^2)}{\sqrt{\lambda_i^2 + 2/\lambda_i - 3}} \frac{1 - e^{-E_3 \sqrt{\lambda_i^2 + 2/\lambda_i - 3}}}{E_3}, \\
A_3 &= \sum_{i=1}^N \frac{(\lambda_i - 1/\lambda_i^2)^2}{\sqrt{\lambda_i^2 + 2/\lambda_i - 3}} \frac{1 - e^{-E_3 \sqrt{\lambda_i^2 + 2/\lambda_i - 3}}}{E_3}, & \sigma^2 &= \sum_{i=1}^N \sigma_i^2.
\end{aligned}$$

Тогда наилучшая квадратичная аппроксимация и её относительная погрешность  $\Delta$  при фиксированном  $E_3$  определяются следующими соотношениями

$$E_1 = \frac{H_2 A_3 - H_1 A_2}{A_3^2 - A_1 A_2}, \quad E_2 = \frac{H_1 A_3 - H_2 A_1}{A_3^2 - A_1 A_2}, \quad \Delta = \left( 1 - \frac{H_1 E_1 + H_2 E_2}{\sigma^2} \right)^{1/2} \quad (3)$$

Для безразмерного параметра  $E_3$ , мы имеем задачу нелинейного программирования в одномерном пространстве с целевой функцией  $\delta$  – относительной погрешностью среднеквадратичной аппроксимации. Такая задача легко решается множеством различных методов, в том числе и методом простого перебора параметра  $E_3$  на некоторой сетке.

В результате аппроксимации исходного материала – ненаполненного («чистого») бутадиен-стирольного каучука, были получены следующие значения коэффициентов в потенциале энергии (1):  $E_1 = 0.2277 \text{ MPa}$ ,  $E_2 = 0.3595 \text{ MPa}$ ,  $E_3 = 1.2495$ ; относительная погрешность аппроксимации экспериментальных данных составила  $\Delta = 1.17\%$ .

На рис.3 представлена диаграмма изменения напряжений в зависимости от относительного удлинения  $\delta$  при одноосном растяжении, где кружочками обозначены экспериментальные данные.

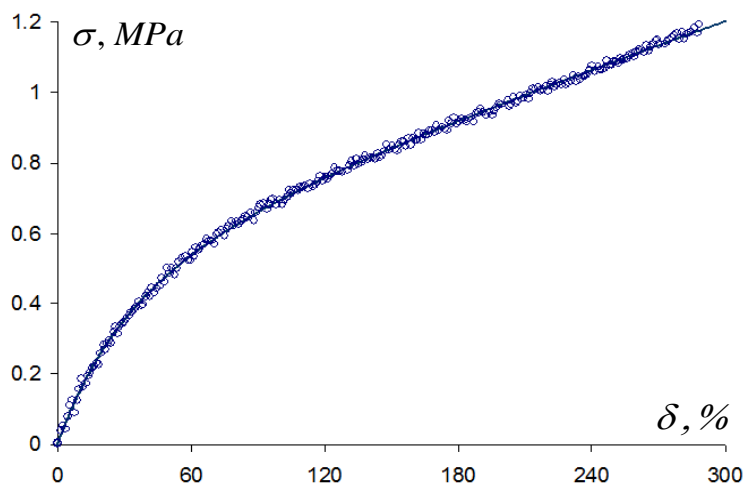


Рис.3. Аппроксимация диаграммы одноосного растяжения бутадиен-стирольного каучука:  $\circ$  результаты экспериментов, — аппроксимирующая кривая.

## 2. РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ НА ЯЧЕЙКЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Согласно методике параметрического усреднения [3] эффективные механические характеристики, определяющие тензор жёсткости  $\hat{c}_{ijkl}$ , где  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ , находятся как средние по периоду от псевдонапряжений, порождаемых периодическими функциями быстрых переменных в задаче на ячейке периодичности при определенном виде деформациях наполненного образца гиперупругого материала.

В качестве наполнителя используются дисперсные частицы минерала шунгит, описываемые в рамках изотропной упругой модели с модулем Юнга  $E = 1.5 \text{ ГПа}$  и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.3$ . Предполагается, что в рассматриваемой модели полимерный композит имеет периодическую структуру с кубической ячейкой периодичности, содержащей частицу наполнителя сферической формы. Концентрация частиц наполнителя определяется коэффициентом объёмного заполнения  $c_0$ , который принимает значение  $c_0 = 2.5\%$  для частиц микрошунгита и  $c_0 = 4\%$  для частиц наношунгита. В случае заполнения матрицы частицами наношунгита вокруг включений выделяется промежуточная межфазная зона сферической формы и заданной относительной ширины  $l_0/R$ , определяемой экспериментальным образом, где  $R$  – радиус включений. Рассматривались следующие значения для нановключений:  $l_0/R = 0.39$ ,  $R = 85 \text{ нм}$ ; модуль Юнга межфазного слоя принимался равным  $E = 1.0 \text{ ГПа}$ , а коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ . Для микрошунгита ( $R = 120 \text{ нм}$ ) в расчётах полагалось, что межфазный слой отсутствует, т.к. при таком размере включения межфазным слоем можно пренебречь.

Анализируя задачу на ячейке для включений сферической формы, приходим к выводу, что для определения касательного модуля Юнга необходимо решать задачу об одноосном растяжении ячейки из несжимаемого материала с включением при сохранении параллельности боковых граней, и в качестве расчётной области можно взять  $1/8$  часть ячейки. Соответственно, для определения касательного модуля сдвига необходимо решать задачу на  $1/8$  части ячейки периодичности при условии параллельности боковых граней и при деформациях чистого сдвига, сохраняющих объем каждого элементарного кубика в главных осях деформации. Соответствующие расчётные схемы представлены на рис.4,5.

При этом передняя грань по оси  $z$  перемещается при одноосном растяжении (рис.4) на расстояние, соответствующее относительному удлинению величиной  $\delta$

$$u_z = \delta A, \quad z = A, \quad (4)$$

где:  $A$  – половина расстояния между центрами включений (т.е. длина  $1/8$  части ячейки с включением).

При деформации чистого сдвига задается одновременное, согласованное и сохраняющее общий объем ячейки перемещение свободных граней по оси  $x$  и  $y$  (см. рис.5)

$$u_x = -\delta A, \quad x = -A, \quad u_y = \frac{\delta A}{1 + \delta}, \quad y = -A \quad (5)$$

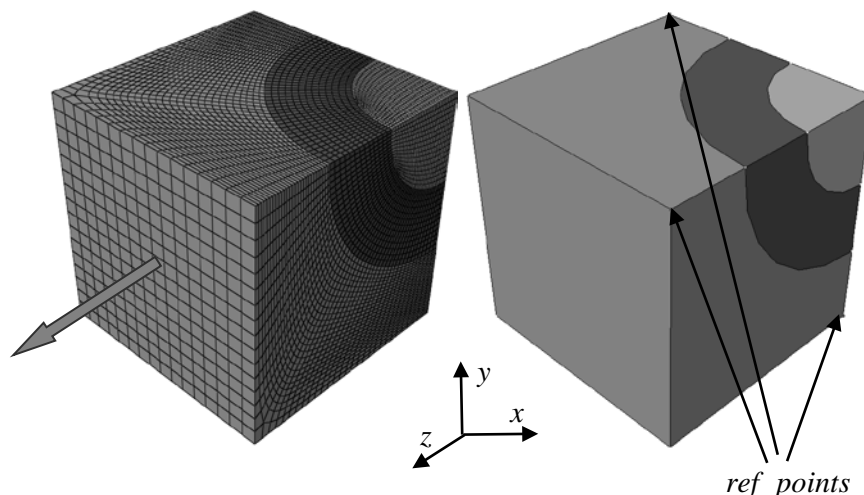


Рис. 4. Расчётная схема для вычисления эффективного модуля Юнга.

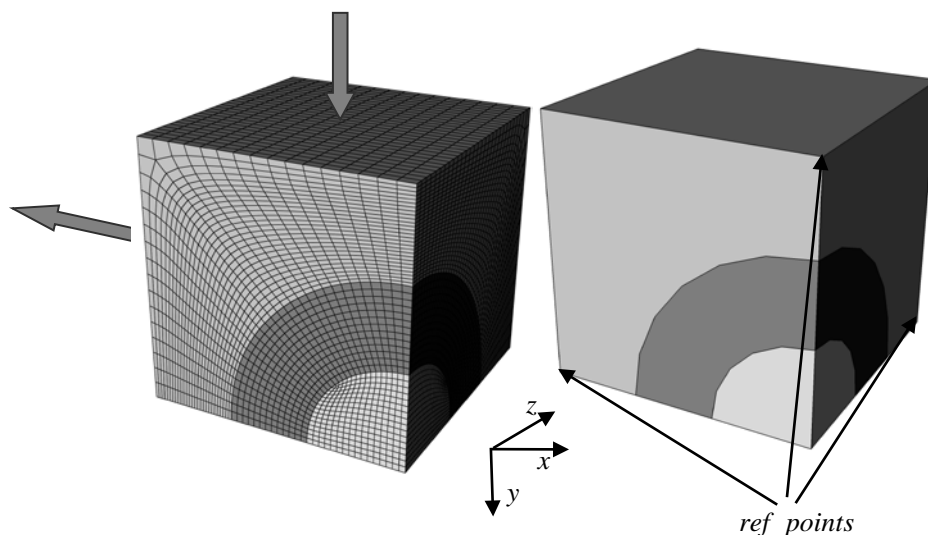


Рис.5. Расчётная схема для вычисления эффективного модуля сдвига.

Условие периодичности реализуется при выполнении (4), (5) как требование свободного перемещения оставшихся граней при условии сохранения их параллельности закрепленным граням. Для того чтобы обеспечить выполнение этого условия, были введены контрольные точки (reference points)  $Ref\_X$ ,  $Ref\_Y$ ,  $Ref\_Z$  (см. рис.4,5) и в расчётную конечно-элементную схему было добавлено ограничение

$$x_i = x_{ref}, \quad y_i = y_{ref}, \quad z_i = z_{ref} \tag{6}$$

для узлов конечно-элементной сетки на свободных гранях.

В соответствии с изложенной схемой были проведены расчёты диаграммы напряжений при одноосном растяжении и деформациях чистого сдвига, и на основе этих диаграмм вычислены эффективные касательный модуль Юнга  $\hat{E}$  и касательный модуль сдвига  $\hat{G}$ . Диаграмма напряжений представляет собой зависимость средних растягивающих напряжений  $\hat{\sigma}_3$  в случае одноосного растяжения от параметра относительного удлинения ячейки  $\delta_3$  и в случае деформации чистого сдвига  $\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_{cp}$  в зависимости от параметра относительной

компоненты девиаторного удлинения ячейки  $\delta_1 - \frac{1}{3}(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)$ . Результаты расчётов представлены на рис.6-9.

На рис.6 представлено распределение микронапряжений в ячейке с включением из микрошунгита в условиях одноосного растяжения.

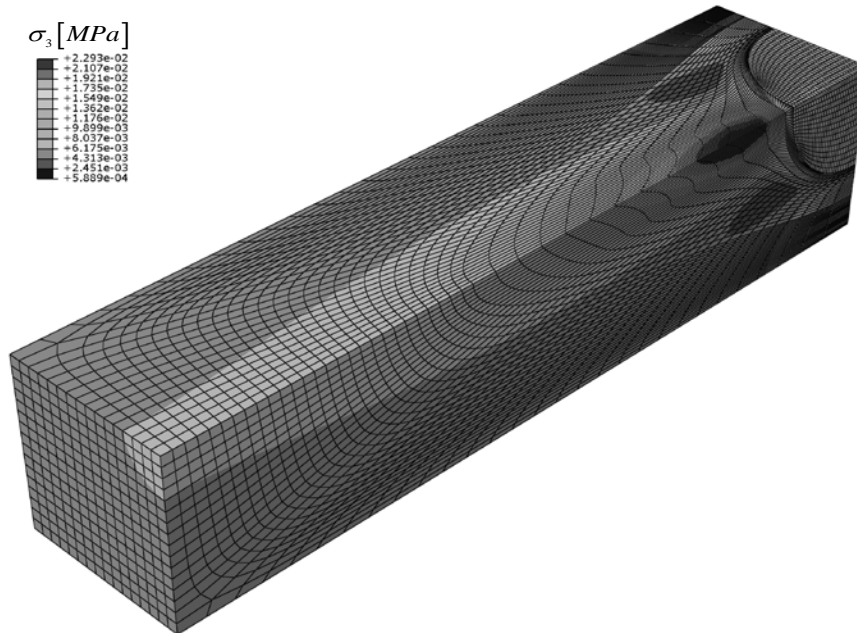


Рис.6. Растягивающие напряжения в ячейке с включением из микрошунгита при одноосном растяжении ( $\delta_3 = 180\%$ ).

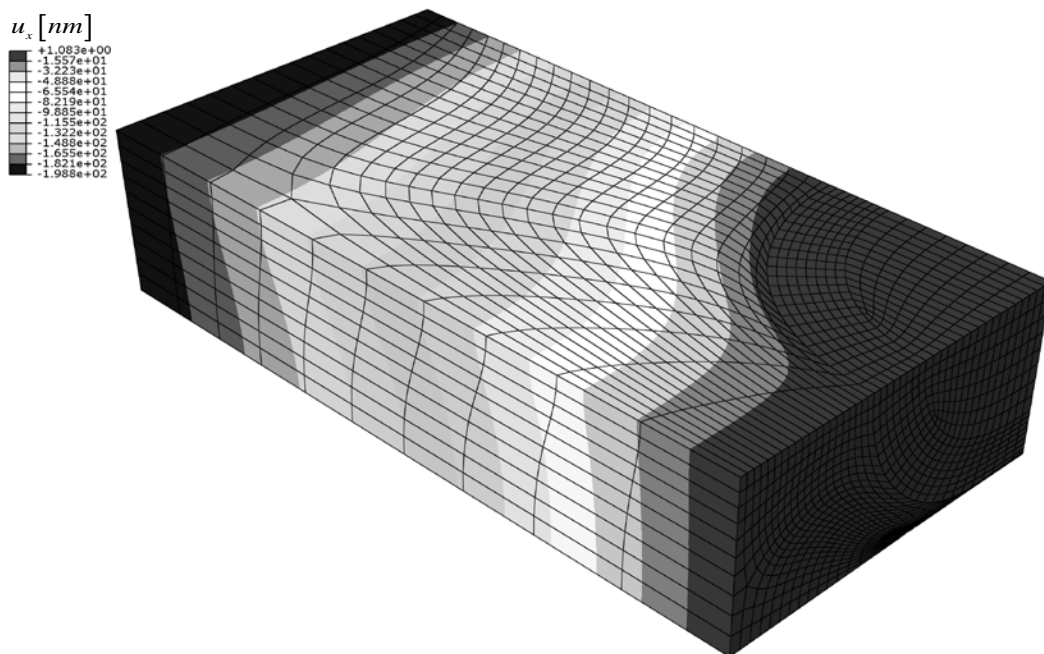


Рис.7. Компонента перемещений  $u_1 = u_x$  в ячейке с включением из наношунгита

при деформации чистого сдвига ( $\delta_1 = 100\%$   $\delta_2 = \frac{\delta_1}{0.01(1 + \delta_1)}\%$   $\delta_3 = 0\%$ ).



На рис.7 в качестве иллюстративного примера представлено распределение компоненты перемещений в ячейке с включением из наношунгита в условиях деформации чистого сдвига.

Эффективный модуль Юнга  $\hat{E} = \hat{E}(\delta)$  рассчитывался как производная по параметру удлинения  $\delta = \delta_3$  диаграммы напряжений при одноосном растяжении

$$\hat{E}(\delta) = \frac{d\hat{\sigma}_3(\delta)}{d\delta} \tag{7}$$

Соответственно эффективный модуль сдвига  $\hat{G} = \hat{G}(\delta)$  рассчитывался как производная по параметру  $\delta = \delta_1 - \frac{1}{3}(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)$  удлинения диаграммы напряжений при деформациях чистого сдвига

$$\hat{G}(\delta) = \frac{1}{2} \frac{d(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_{cp})}{d\delta} \tag{8}$$

На рис.8 представлен эффективный модуль Юнга и модуль сдвига в модели с микрошунгитом без межфазного слоя в зависимости от параметра удлинения  $\delta$ ; на рис.9 представлены те же данные в модели с наношунгитом с межфазным слоем.

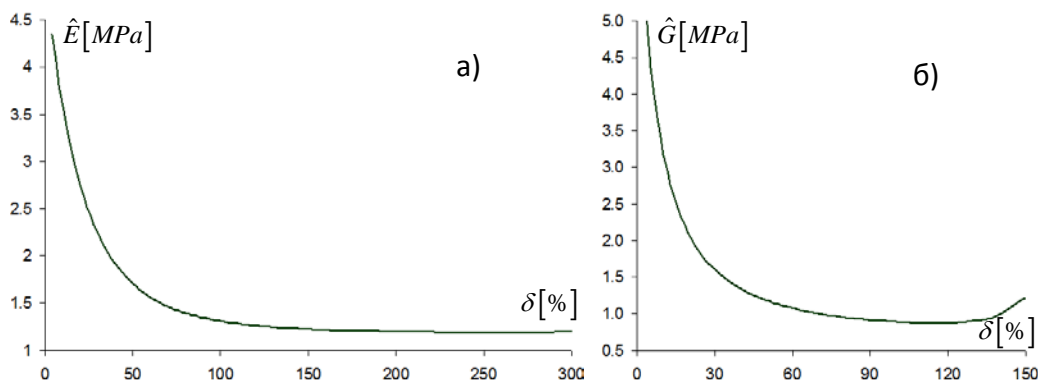


Рис.8. Эффективные модули в модели с микрошунгитовым наполнителем: а) модуль Юнга  $\hat{E}$ ; б) модуль сдвига  $\hat{G}$ .

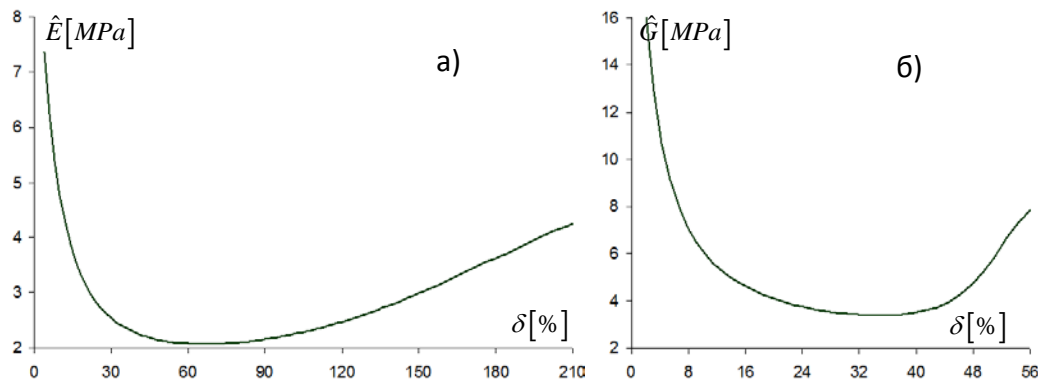


Рис.9. Эффективные модули в модели с наношунгитовым наполнителем: а) модуль Юнга  $\hat{E}$ ; б) модуль сдвига  $\hat{G}$ .

В модели с наносунгитом проявляется ярко выраженный эффект Пейна для механических характеристик наполненного композита (т.е. немонотонное поведение модулей жёсткости в зависимости от удлинения).

Следует отметить, что на основе построенной численной модели растяжения композитного материала с микро- и наносунгитовыми включениями могут быть идентифицированы механические свойства матрицы в наполненном материале. Сопоставление численных расчётов с экспериментальными данными показывает, что в наполненном материале свойства матрицы отличаются от исходных значений (рис. 3). В результате сопоставления расчётных и экспериментальных данных для эластомеров с микро- и наносунгитовым наполнителем, были получены другие параметры в потенциале энергии (1): а) для микрошунгитового наполнителя без межфазного слоя  $E_1 = 0.4914 MPa$ ,  $E_2 = 0.6205 MPa$ ,  $E_3 = 1.4993$ ; б) для наносунгитового наполнителя с межфазным слоем  $E_1 = 1.0433 MPa$ ,  $E_2 = 1.6177 MPa$ ,  $E_3 = 5.6225$ .

На рис.10 представлена соответствующая диаграмма растяжения в сопоставлении с экспериментальными данными.

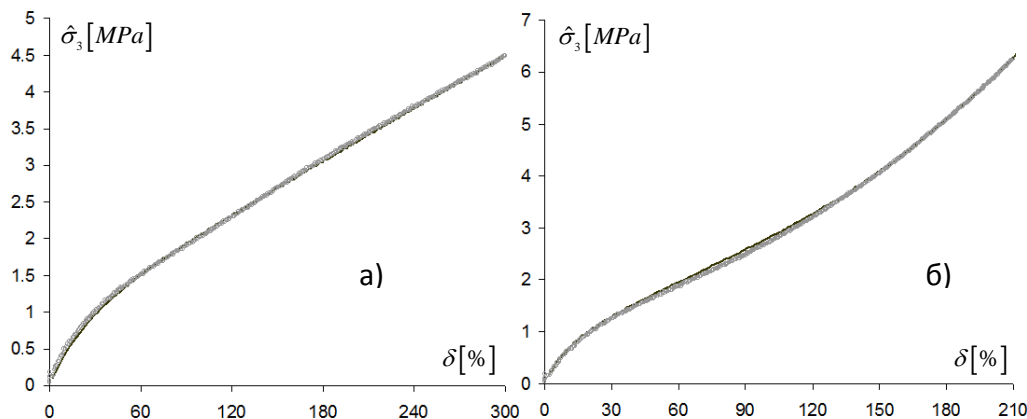


Рис.10. Диаграмма растяжения (сплошная линия) в сопоставлении с экспериментальными данными ( $\circ$ ): а) микрошунгит; б) наносунгит.

На рис.11 представлена диаграмма напряжений для наполненного материала при деформации чистого сдвига.

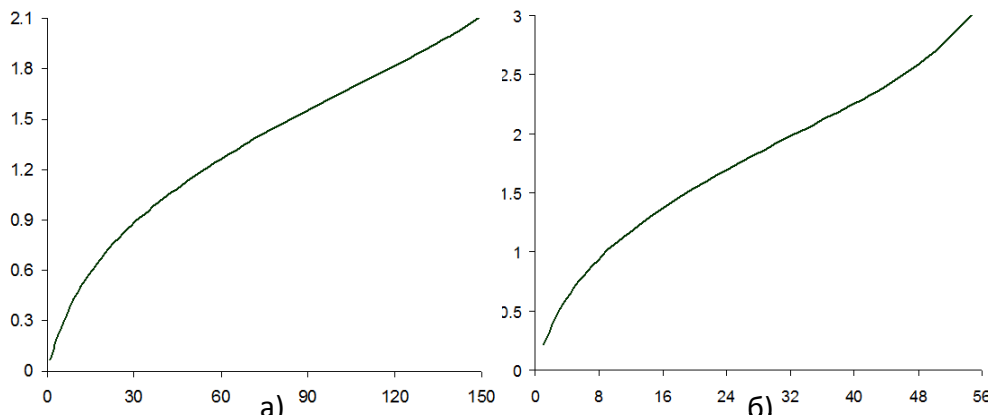


Рис.11. Диаграмма растяжения при деформациях чистого сдвига: а) микрошунгит; б) наносунгит.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен вариант развиваемого параметрического метода асимптотического усреднения в его аналитико-численном представлении для уравнений теории упругости с быстро-осциллирующими коэффициентами, которые описывают процессы геометрически нелинейного деформирования структурно-неоднородных гиперупругих материалов, имеющих внутреннюю микроструктуру, обусловленную наличием периодической системы включений с возможным промежуточным межфазным слоем. Приводятся численные результаты для гиперупругого композита, эластомерная матрица которого представляет собой бутадиен-стирольный каучук, а дисперсный наполнитель – минерал шунгит.

Результаты аналитико-численных исследований показывают:

1. На деформационные свойства эластомерных композитов существенное влияние оказывает технология их изготовления (применение различных модификаторов, агрегация частиц наполнителя и пр.).
2. Агрегация частиц наполнителя приводит к ухудшению свойств эластомерных композитов.
3. Так как при наполнении эластомерной матрицы частицами при одной и той же объёмной доле расстояние между частицами уменьшается с уменьшением размеров частиц, то на масштабном уровне от микро- до нано- это влечет за собой изменение свойств матрицы. Её жёсткость увеличивается по сравнению с жёсткостью «чистого» материала матрицы. Это, по-видимому, обусловлено тем, что макромолекулы эластомера структурируются, ориентируясь (вытягиваясь) в направлении близлежащих окружающих частиц наполнителя и при возможности «пришиваясь» к ним.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов Г.В., Яновский Ю.Г., Карнет Ю.Н. *Структура и свойства дисперсно-наполненных полимерных композитов. Фрактальный анализ.* – М.: Альянстрансатом, 2008. – 363 с.
2. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б., Яновский Ю.Г. *Влияние размера включений на механические свойства эластомерных композитов* // Доклады Академии Наук. – 2012. – Т.443. – №4. – С.435-437.
3. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б. *Параметрический метод асимптотического усреднения для нелинейных уравнений термоупругости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.491-507.
4. Meng-Jiao Wang *The role of filler networking in dynamic properties* // Rubber chemistry and technology. – 1998. – Vol.72. – P.430-448.
5. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.
6. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов.* – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
7. Власов А.Н., Мерзляков В.П. *Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород.* – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2009. – 208 с.
8. Гамлицкий Ю.А., Мудрук В.И., Швачич М.В. *Упругий потенциал наполненных резин* // Каучук и резина. – 2002. – №3. – С.29-39.

## REFERENCES

1. Kozlov G.V., Ianovskii Iu.G., Karnet Iu.N. *Struktura i svoistva dispersno-napolnennykh polimernykh kompozitov. Fraktal'nyi analiz [Structure and properties of dispersed-filled polymeric composites. Fractal analysis]*. Moskva: Al'ianstransatom, 2008, 363 p.
2. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskii D.B., Ianovskii Iu.G. *Effect of Inclusion Size on the Mechanical Properties of Elastomeric Composites*. Doklady Physics, 2012, Vol.57, No.4, Pp.157-159.
3. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskii D.B. *Parametricheskii metod asimptotiches-kogo usredneniia dlia nelineinykh uravnenii termouprugosti [Parametric asymptotic averaging method for nonlinear equations of thermo elasticity]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2014, Vol.20, No.4, Pp.491-507.
4. Meng-Jiao Wang *The Role of Filler Networking in Dynamic Properties*. Rubber chemistry and technology, 1998, Vol.72, Pp.430-448.
5. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Homogenization of Processes in Periodic Media*. Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 1989.
6. Pobedria B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]*. Moskva: Izd-vo MGU, 1984, 336 p.
7. Vlasov A.N., Merzliakov V.P. *Usrednenie deformatsionnykh i prochnostnykh svoistv v mekhanike skal'nykh porod [Averaging of Strain and Strength Properties in Rock Mechanics]*. Moskva: Izd-vo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2009, 208 p.
8. Gamlitskii Iu.A., Mudruk V.I., Shvachich M.V. *Uprugii potentsial napolnennykh rezin [The elastic potential of filled rubber]*. Kauchuk i rezina, 2002, No.3, Pp.29-39.

Поступила в редакцию 19 февраля 2016 года

---

### Сведения об авторах:

Власов Александр Николаевич – д.т.н., дир., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [bah1955@ya.ru](mailto:bah1955@ya.ru)

Волков-Богородский Дмитрий Борисович – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [v-b1957@yandex.ru](mailto:v-b1957@yandex.ru)

Карнет Юлия Николаевна – к.ф.-м.н., уч. секр., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [iam@iam.ras.ru](mailto:iam@iam.ras.ru)