

УДК 539.3

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО ПЬЕЗОПОЛИМЕРНОГО СТЕРЖНЯ<sup>1</sup>

Богачев И.В. \*, Ватульян А.О. \*, Дударев В.В. \*\*,\*\*

*\* Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия**\*\* Южный математический институт, г. Владикавказ, Россия*

### АННОТАЦИЯ

В работе представлено исследование обратной задачи об идентификации механических и пьезоэлектрических характеристик функционально-градиентного пьезополимерного стержня. При этом определяющие соотношения электроупругости для пьезополимера сформулированы на основе концепции комплексных модулей аналогично моделям вязкоупругости. В рамках такого подхода было рассмотрено два вида нагружения: механическое - путем приложения нагрузки к торцу стержня при отсутствии электрического тока в цепи и электрическое - путем наведения разности потенциалов на торцах стержня. Один из торцов стержня считался жестко заземленным. Таким образом, из двух экспериментов удалось получить два вида дополнительной информации для решения обратной задачи о перемещении и потенциале электрического поля, измеренных на свободном торце стержня в некотором частотном диапазоне. Для удобства дальнейшего исследования были введены безразмерные параметры и переменные. Ввиду существенной нелинейности обратной задачи был построен специальный итерационный процесс решения сформулированной задачи, основанный на сочетании линеаризации и метода регуляризации А.Н.Тихонова. На каждом шаге итерационного процесса на первом этапе решается прямая задача об определении функций перемещения и потенциала электрического поля в стержне. Решение прямой задачи осуществлялось двумя способами - с помощью метода Рунге-Кутты-Фельберга и на основе сведения к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода. На втором этапе поправки к неизвестным функциям вычислялись из построенной системы интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода, для решения которой, ввиду некорректности процедуры обращения, применялся метод регуляризации А.Н. Тихонова. Представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению неоднородных механических и пьезоэлектрических характеристик для функционально-градиентного пьезополимерного стержня. Проведенные эксперименты показали, что неизвестные функции удается восстанавливать с погрешностью, не превосходящей 6-8%, что подтверждает достаточную эффективность разработанного подхода.

**Ключевые слова:** функционально-градиентные материалы; пьезополимер; неоднородный стержень; комплексный модуль; идентификация

## IDENTIFICATION OF INHOMOGENEOUS CHARACTERISTICS OF FUNCTIONALLY GRADED PIEZO-POLYMERIC ROD

Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Dudarev V.V.

*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia  
South Mathematical Institute of Vladikavkaz, Russia*

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-31-00144 мол-а и 16-01-00354 А).

## ABSTRACT

The paper presents a study of the inverse problem of identification of mechanical and piezoelectric characteristics of functionally graded piezoelectric polymer rod. The defining relations for the electrodynamic piezo-polymer are formulated based on the conception of complex modules, similar to the model of viscoelasticity. With this approach two types of load are considered: mechanical - through the application of the load to the end of the rod without applying electrical current in the circuit and electrical - by applying a potential difference at the ends of the rod. One of the ends of the rod considered rigidly clamped. Thus, from two experiments able to get two kinds of additional information for solving the inverse problem. It is the displacement of the rod and the potential of electric field. These characteristics are measured on the free end of the rod in a certain frequency range. For convenience of further studies dimensionless parameters and variables were introduced. Due to a significant nonlinearity of the inverse problem we have built a special iterative process of solving, which based on a combination of linearization method and Tikhonov regularization. At each step of the iterative process at first stage we solve the direct problem of determining the functions of displacement and electric field potential in the rod. Solution of the direct problem performed in two ways - by using Runge-Kutta-Felberg method and by using Fredholm integral equations of the 2nd kind. On the second stage the modifications to unknown functions are isolated from the constructed system of Fredholm integral equations of the 1st kind. To solve this system, due to incorrect handling procedures method of regularization A.N.Tikhonov is used. The results of computational experiments of identification of inhomogeneous mechanical and piezoelectric characteristics of the functionally graded piezo-polymer rod are presented. Experiments have shown that unknown functions are possible to identify with an error not exceeding 6-8%, which confirms the effectiveness of the developed approach.

**Keywords:** functionally graded materials; piezo-polymeric materials; inhomogeneous rod; complex module; identification

## ВВЕДЕНИЕ

Современные функционально-градиентные пьезоэлектрики (ФГПЭ) активно применяются в электромеханических устройствах умных систем, которые используются во многих высокотехнологичных отраслях, таких как авиастроение, космические технологии, атомная энергетика, медицина и других. Основной особенностью данных материалов является непрерывное изменение электрических и механических свойств, что, в отличие от дискретных свойств композитных материалов, не приводит к разрушению изделий в результате расслоения, вызванного концентрацией напряжений в пограничных зонах, тем самым определяя структурную целостность и прочность всего изделия. Также, стоит отметить, что современные методы создания ФГПЭ, такие как метод порошковой металлургии, технология плавления, жидкофазовое депонирование, позволяют создавать материалы с наперед заданными характеристиками в широком диапазоне их изменения, что делает их использование доступным в различных областях техники. Широкое распространение также получают функционально-градиентные пьезополимеры (ФГПП), отличительными свойствами которых являются значительные коэффициенты затухания, низкая теплопроводность, надежность и долговечность при циклических нагружениях, являющихся одними из самых распространенных на практике.

Одним из наиболее применяемых ФГПП является поливинилиденфторид (ПВДФ) и сополимеры на его основе. Материалы на основе ПВДФ выпускаются в виде плёнок толщиной от 10 мкм до 1 мм и более, поляризованных по толщине.

Также, пьезокомпозит может иметь структуру либо в виде пористого каркаса пьезокерамики, заполненного полимером, либо может представлять собой полимер с распределенными по структуре частицами пьезокерамики (порошком, зернами). Такие материалы обладают высокой пьезоэлектрической эффективностью, эластичностью и рядом технологических преимуществ.

Исследованию свойств таких ФГПП в последнее время посвящено значительное число публикаций. В работе [1] исследуется влияние растяжения и скручивания нитей поливинилиденфторида на значение пьезомодуля, определяются эффективные значения нагрузок и способы их приложения, позволяющие достичь максимального пьезоэффекта. Полученный из поливинилиденфторида образец использовался при производстве в текстильной ткани, которая используется для диагностики сердцебиения человека. В статье [2] произведено аналогичное исследование, в котором был разработан датчик в виде изогнутой пленки из поливинилиденфторида, что обеспечивало достаточный пьезоэффект, позволяющий фиксировать дыхательную активность и динамику сердцебиения пациентов. В работе [3] исследуется проблема передачи радиоволн в подводном пространстве. Показано, что датчики, изготовленные из новых функциональных пьезополимеров, имеют гораздо более высокую чувствительность, особенно для высокочастотных сигналов, по сравнению со стандартными пьезокерамиками. В статье [4] разработаны методы решения задач определения механических и пьезоэлектрических параметров однородных пленок известной геометрии на основе нерезонансных методов.

Важнейшей задачей при изготовлении ФГПП и исследовании изделий, изготовленных из них, является высокоточное определение их механических и пьезоэлектрических характеристик и оценка степени их отличия от спроектированных. В связи с конструктивными особенностями строения ФГПП, связанными с процессами их изготовления, данные материалы могут иметь существенно неоднородные вязкоупругие и пьезоэлектрические характеристики, что требует создания новых методов их определения. Решение новых обратных задач, заключающихся в определении характеристик ФГПП, позволит моделировать реальное поведение конструкций из них.

В настоящей работе рассмотрена обратная коэффициентная задача идентификации свойств функционально-градиентного пьезополимерного стержня на основе анализа продольных колебаний. Колебания в стержне возбуждаются двумя способами: с помощью механического нагружения и с помощью наведения разности потенциалов на электродах, напыленных на торцах стержня. Учет эффекта затухания в пьезополимере осуществляется путем введения в определяющие соотношения электроупругости комплексных модулей как для модуля упругости, так и для пьезомодуля аналогично модели стандартного вязкоупругого тела. Для реализации решения обратной задачи представлен подход, разработанный на основе успешно примененных ранее [5-7] методов идентификации характеристик вязкоупругих и электроупругих ФГМ для областей типа стержней и слоев. К преимуществам использованного метода, основанного на акустическом зондировании можно отнести его неинвазивность и достаточную простоту практической реализации. Также стоит отметить, что данный метод применим в том случае, когда для непосредственного измерения доступна лишь некоторая часть исследуемого объекта. Так, в данной задаче в качестве входной информации, получаемой непосредственно из эксперимента, выступают значения

функции смещения и электрической индукции, измеренные в одной точке – торце стержня для заданного набора частот. Следуя разработанному подходу, для идентификации мгновенных и длительных модулей построен специальный итерационный процесс, в результате применения которого удается восстанавливать два комплексных модуля, соответствующих модулю упругости и пьезомодулю, каждый из которых включает две функции, характеризующих мгновенные и длительные модули.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим продольные колебания функционально-градиентного пьезополимерного стержня длины  $l$ , в котором вследствие влияния технологических операций модуль податливости  $s$  и пьезомодуль  $d$  не постоянны, а являются функциями продольной координаты. Выпишем уравнения движения, граничные условия и определяющие соотношения, соответствующие классической теории электроупругости [8,9] после отделения временного множителя

$$\sigma' + \rho\omega^2 u = 0 \quad (1)$$

$$u' = s\sigma - d\varphi' \quad (2)$$

$$D' = 0 \quad (3)$$

$$D = d\sigma - \varepsilon\varphi' \quad (4)$$

где  $\sigma$  – компонента тензора напряжений,  $u$  – компонента продольного перемещения вдоль оси стержня  $x$ ,  $\varphi$  – потенциал электрического поля,  $D$  – компонента вектора электрической индукции,  $\varepsilon$  – диэлектрическая постоянная,  $\rho$  – плотность. Величины  $\rho$ ,  $\varepsilon$  – постоянны и считаются известными.

Для учета затухания в пьезополимере воспользуемся принципом соответствия и в рамках теории комплексных модулей [10] будем считать модуль

упругости  $E(x, \omega) = \frac{1}{s(x, \omega)} = \frac{in_s \omega E_2(x) + E_1(x)}{1 + in_s \omega}$  и пьезомодуль

$d(x, \omega) = \frac{in_d \omega d_2(x) + d_1(x)}{1 + in_d \omega}$  комплексными функциями продольной координаты

и частоты колебаний аналогично модели стандартного вязкоупругого тела. Функции  $E_1(x)$ ,  $d_1(x)$  и  $E_2(x)$ ,  $d_2(x)$  характеризуют длительные и мгновенные модули упругости соответственно, параметры  $n_s$  и  $n_d$  – времена релаксации. При этом из общих свойств операторов вязкоупругости следуют ограничения  $0 < E_1(x) < E_2(x)$ ,  $0 < d_1(x) < d_2(x)$ .

Рассмотрим две постановки задачи.

1. В первой постановке будем считать, что колебания стержня вызваны механической нагрузкой

$$\sigma(l, \omega) = p, \quad (5)$$

$$u(0, \omega) = 0, \quad (6)$$

$$\varphi(0, \omega) = \varphi(l, \omega) = 0. \quad (7)$$

Граничные условия (5)-(7) соответствуют задаче о колебаниях электроупругого стержня, консольно защемленного на левом конце с коротко замкнутыми электродами. Продольные колебания вызываются периодической во времени нагрузкой с амплитудой  $p$ , действующей на правом конце.

Обратная задача 1. Определить функции  $s(x, \omega)$ ,  $d(x, \omega)$ ,  $u(x, \omega)$  и  $\varphi(x, \omega)$ , удовлетворяющие (1)-(7), по дополнительной информации о функции смещения на свободном конце стержня

$$u(l, \omega) = w(\omega). \quad (8)$$

2. Во второй постановке будем считать, что механические нагрузки отсутствуют, колебания стержня вызваны разницей потенциалов на электродах. Граничные условия примут вид

$$\sigma(l, \omega) = 0, \quad (9)$$

$$u(0, \omega) = 0, \quad (10)$$

$$\varphi(0, \omega) = 0, \quad \varphi(l, \omega) = V. \quad (11)$$

Обратная задача 2. Определить функции  $s(x, \omega)$ ,  $d(x, \omega)$ ,  $u(x, \omega)$  и  $\varphi(x, \omega)$ , удовлетворяющие (1)-(7), по дополнительной информации о значении электрической индукции на торце

$$D(l, \omega) = D_0(\omega). \quad (12)$$

Отметим, что сформулированные обратные задачи являются существенно нелинейными и требуют построения специальных методов решения [10], [11].

Ввиду схожести представленных постановок, рассмотрим общую постановку задачи, выразив функцию  $\sigma(x, \kappa) = \left( \frac{u'}{s} + \frac{d}{s} \varphi' \right)$  из (2)

$$\left( \frac{u'}{s} + \frac{d}{s} \varphi' \right)' + \rho \omega^2 u = 0, \quad (13)$$

$$\left( \frac{du'}{s} - \left( \varepsilon - \frac{d^2}{s} \right) \varphi' \right)' = 0, \quad (14)$$

$$\left( \frac{u'}{s} + \frac{d}{s} \varphi' \right) \Big|_{x=l} = P_0, \quad (15)$$

$$u(0, \omega) = 0, \quad (16)$$

$$\varphi(0, \omega) = 0, \quad \varphi(l, \omega) = V_0. \quad (17)$$

Для первой постановки  $P_0 = p$ ,  $V_0 = 0$ , для второй  $P_0 = 0$ ,  $V_0 = V$ .

Введем безразмерные параметры и характеристики:  $x = l\xi$ ,  $u(x, \omega) = l\tilde{u}(\xi, \omega)$ ,  $\varphi(x, \omega) = \Psi_0 \tilde{\varphi}(\xi, \kappa)$ ,  $C(\xi, \kappa) = \frac{i\tau_c \kappa g_c(\xi) + h_c(\xi)}{1 + i\tau_c \kappa}$ ,  $d(x, \kappa) = \frac{i\tau_d \kappa g_d(\xi) + h_d(\xi)}{1 + i\tau_d \kappa}$ ,  $\frac{1}{E(x, \omega)} = s(x, \omega) = s_0 \tilde{s}(\xi, \kappa)$ ,  $s_0 = s_1(1, \omega) = \frac{1}{E(1, \omega)} = \frac{1}{E_0}$ ,  $E_1(x) = E_0 h_c(\xi)$ ,  $E_2(x) = E_0 g_c(\xi)$ ,  $d(x, \omega) = d_0 \tilde{d}(\xi, \kappa)$ ,  $d_0 = d_1(1)$ ,  $d_1(x) = d_0 h_d(\xi)$ ,  $d_2(x) = d_0 g_d(\xi)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\kappa^2 = s_0 \rho \omega^2 l^2$ ,  $\tau_c = n_c / s_0 \rho l^2$ ,  $\tau_d = n_d / s_0 \rho l^2$ ,  $\Psi_0 = \frac{l}{d_0}$ ,  $P_0 = l s_0 \tilde{P}_0$ ,  $V_0 = \Psi_0 \tilde{V}_0$ .

Введем обозначения  $C = 1/s$ ,  $d_1 = Cd$ ,  $d_2 = Cd^2 - \lambda^{-2}$ . Параметр  $\lambda = \varepsilon_0 s_0 / d_0^2$  характеризует коэффициент электромеханической связи (на практике принимает значения от 0.1 до 0.5). С учетом введенных обозначений запишем постановку в виде (тильды для удобства будем опускать)

$$(Cu' + d_1 \varphi')' + \kappa^2 u = 0, \quad (18)$$

$$(d_1 u' + d_2 \varphi')' = 0, \quad (19)$$

$$(Cu' + d_1 \varphi') \Big|_{\xi=1} = P_0, \quad (20)$$

$$u(0, \kappa) = 0, \quad (21)$$

$$\varphi(0, \kappa) = 0, \quad \varphi(1, \kappa) = V_0. \quad (22)$$

## 2. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Решение прямой задачи по нахождению смещения и потенциала -функций  $u(\xi, \kappa)$  и  $\varphi(\xi, \kappa)$  по известным функциям  $C(\xi, \kappa)$ ,  $d(\xi, \kappa)$  в данной работе реализовано двумя способами:

1. На основе метода Рунге-Кутты-Фельберга 4-го порядка, для реализации которого отделены вещественная и мнимая части в исходной задаче (18)-(22). При этом функции, входящие в краевую задачу представлены в виде

$$u = u_{\text{Re}} + i u_{\text{Im}}, \quad \varphi = \varphi_{\text{Re}} + i \varphi_{\text{Im}}, \quad (23)$$

$$\text{Re}(d_1) = C_{\text{Re}} d_{\text{Re}} - C_{\text{Im}} d_{\text{Im}}, \quad \text{Im}(d_1) = C_{\text{Im}} d_{\text{Re}} + C_{\text{Re}} d_{\text{Im}}, \quad (24)$$

$$\text{Re}(d_2) = C_{\text{Re}} (d_{\text{Re}}^2 - d_{\text{Im}}^2) - 2C_{\text{Im}} d_{\text{Re}} d_{\text{Im}} - \lambda^{-2},$$

$$\text{Im}(d_2) = C_{\text{Im}} (d_{\text{Re}}^2 - d_{\text{Im}}^2) + 2C_{\text{Re}} d_{\text{Re}} d_{\text{Im}}. \quad (25)$$

2. Путем сведения к интегральным уравнениям Фредгольма (ИУФ) 2-го рода. В результате преобразований получено ИУФ 2-го рода, из которого определяется функция  $u(\xi, \kappa)$

$$u(\xi, \kappa) = \kappa^2 \int_0^1 u(\zeta, \kappa) \left[ g_3(\min(\xi, \zeta), \kappa) - \frac{g_2(\xi, \kappa)}{g_1(1, \kappa)} g_2(\zeta, \kappa) \right] d\zeta + \\ + P_0 \left( g_3(\xi, \kappa) - \frac{g_2(\xi, \kappa)}{g_1(1, \kappa)} g_2(1, \kappa) \right) - V_0 \frac{g_2(\xi, \kappa)}{g_1(1, \kappa)}. \quad (26)$$

Функция  $\varphi(\xi, \kappa)$  определяется при известном  $u(\xi, \kappa)$  по формуле

$$\varphi(\xi, \kappa) = -\kappa^2 \int_0^1 u(\zeta, \kappa) \left[ g_2(\min(\xi, \zeta), \kappa) + \frac{g_1(\xi, \kappa)}{g_1(1, \kappa)} g_2(\zeta, \kappa) \right] d\zeta - \\ - P_0 \left( g_2(\xi, \kappa) - \frac{g_1(\xi, \kappa)}{g_1(1, \kappa)} g_2(1, \kappa) \right) + \frac{g_1(\xi, \kappa)}{g_1(1, \kappa)} V_0. \quad (27)$$

Здесь введены обозначения

$$g_1(\xi, \kappa) = \int_0^\xi \frac{C(\eta, \kappa)}{\Delta(\eta, \kappa)} d\eta, \quad g_2(\xi, \kappa) = \int_0^\xi \frac{d_1(\eta, \kappa)}{\Delta(\eta, \kappa)} d\eta, \quad g_3(\xi, \kappa) = \int_0^\xi \frac{d_2(\eta, \kappa)}{\Delta(\eta, \kappa)} d\eta,$$

$$\Delta(\xi, \kappa) = d_2(\xi, \kappa)C(\xi, \kappa) - d_1^2(\xi, \kappa).$$

Полученные формулы для обоих подходов справедливы для обеих сформулированных постановок задач, при этом, как уже указывалось ранее, для первой постановки  $P_0 = p$ ,  $V_0 = 0$ , для второй  $P_0 = 0$ ,  $V_0 = V$ .

Оба предложенных подхода про решению прямых задач были протестированы для модельных случаев, когда решение задач можно получить в аналитическом виде, и показали одинаково высокую степень точности получаемых результатов. Однако, ввиду более высокой скорости работы первого подхода, основанного на методе Рунге-Кутты-Фельберга 4-го порядка, именно

этот подход был выбран основным при реализации специального итерационного процесса по решению обратной задачи, описанного ниже.

### 3. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПОДХОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Сформулируем две постановки обратных задач для введенных безразмерных обозначений соответственно для двух экспериментов – механического и электрического нагружений.

Обратная задача 1. Определить функции  $C(\xi, \kappa)$ ,  $d(\xi, \kappa)$ ,  $u(\xi, \kappa)$  и  $\varphi(\xi, \kappa)$ , удовлетворяющие (18)-(22), где  $P_0 = p$ ,  $V_0 = 0$ , по дополнительной информации

$$u(1, \kappa) = w(\kappa). \quad (28)$$

Обратная задача 2. Определить функции  $C(\xi, \kappa)$ ,  $d(\xi, \kappa)$ ,  $v(\xi, \kappa)$  и  $\psi(\xi, \kappa)$ , удовлетворяющие (18)-(22), где  $P_0 = 0$ ,  $V_0 = V$ ,  $v(\xi, \kappa) = u(\xi, \kappa)$ ,  $\psi(\xi, \kappa) = \varphi(\xi, \kappa)$  по дополнительной информации

$$d_1 v'(1, \kappa) + d_2 \psi'(1, \kappa) = D_0(\kappa). \quad (29)$$

Построим решения сформулированных обратных задач. Воспользуемся методом линеаризации, представив неизвестные функции в виде разложения по формальному параметру  $\delta$

$$\begin{aligned} C &= C^0 + \delta C^1, \quad d = d^0 + \delta d^1, \quad d_1 = d_1^0 + \delta d_1^1, \quad d_2 = d_2^0 + \delta d_2^1, \\ h_c &= h_c^0 + \delta h_c^1, \quad g_c = g_c^0 + \delta g_c^1, \quad h_d = h_d^0 + \delta h_d^1, \quad g_d = g_d^0 + \delta g_d^1, \\ u &= u^0 + \delta u^1, \quad \varphi = \varphi^0 + \delta \varphi^1, \quad v = v^0 + \delta v^1, \quad \psi = \psi^0 + \delta \psi^1. \end{aligned} \quad (30)$$

Также, ввиду того, что  $d_1 = Cd$ ,  $d_2 = Cd^2 - \lambda^{-2}$ , соответствующие члены разложения (30) имеют вид

$$d_1^0 = C^0 d^0, \quad d_1^1 = C^1 d^0 + C^0 d^1. \quad (31)$$

$$d_2^0 = C^0 (d^0)^2 - \lambda^{-2}, \quad d_2^1 = 2C^0 d^1 d^0 + C^1 (d^0)^2, \quad (32)$$

в результате, выписывая коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\delta$  для обеих постановок, затем проводя несложные преобразования с учетом граничных условий, получим операторное уравнение для поиска поправок к неизвестным функциям для обратной задачи 1 в виде ИУФ 1-го рода

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[ C^1 \left( (u^0)' \right)^2 + 2d^0 u^0' \varphi^0' + (d^0)^2 (\varphi^0')^2 \right] + \\ + 2d^1 \left[ C^0 u^0' \varphi^0' + C^0 d^0 (\varphi^0')^2 \right] d\xi = -p(w(\kappa) - u^0(1, \kappa)). \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогично, для обратной задачи 2 операторное уравнение для поиска поправок к неизвестным функциям получено в виде ИУФ 1-го рода

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[ C^1 \left( (v^0)' \right)^2 + 2d^0 v^0' \psi^0' + (d^0)^2 (\psi^0')^2 \right] + \\ + 2d^1 \left[ C^0 v^0' \psi^0' + C^0 d^0 (\psi^0')^2 \right] d\xi = V_0 (D_0(\kappa) - D(1, \kappa)). \end{aligned} \quad (34)$$

Ввиду того, что функции  $C(\xi, \kappa)$  и  $d(\xi, \kappa)$  являются комплекснозначными, для реализации решения относительно поправок к функциям  $h_c(\xi)$ ,  $g_c(\xi)$ ,  $h_d(\xi)$

и  $g_d(\xi)$  в уравнениях (33) и (34) были отделены вещественные и мнимые части, и была построена система интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Для этого функции комплексных модулей были записаны в виде

$$\frac{i\tau\kappa g^1(\xi) + h^1(\xi)}{1 + i\tau\kappa} = \frac{h^1(\xi)}{1 + \tau^2\kappa^2} + \frac{\tau^2\kappa^2 g^1(\xi)}{1 + \tau^2\kappa^2} + i \left( \frac{\tau\kappa g^1(\xi)}{1 + \tau^2\kappa^2} - \frac{\tau\kappa h^1(\xi)}{1 + \tau^2\kappa^2} \right).$$

Ниже представлена схема специального итерационного процесса одновременного решения обратных коэффициентных задач 1 и 2 на основании полученных операторных соотношений и описанной в предыдущем пункте схемы решения прямых задач.

1. Пусть известно  $(n-1)$ -е приближение неизвестных функций  $h_c^{(n-1)}(\xi)$ ,  $g_c^{(n-1)}(\xi)$ ,  $h_d^{(n-1)}(\xi)$  и  $g_d^{(n-1)}(\xi)$ . Тогда из решения краевой задачи (18)-(22) с помощью метода Рунге-Кутты-Фельберга 4-го порядка получим соответствующие значения функций  $u^{(n-1)}(\xi, \kappa)$ ,  $v^{(n-1)}(\xi, \kappa)$ ,  $\varphi^{(n-1)}(\xi, \kappa)$  и  $\psi^{(n-1)}(\xi, \kappa)$ .

2. Далее поправки к неизвестным функциям  $h_c^1(\xi)$ ,  $g_c^1(\xi)$ ,  $h_d^1(\xi)$  и  $g_d^1(\xi)$  находятся из построенной системы интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. Решение данной системы является некорректной задачей, поэтому был использован метод регуляризации А.Н.Тихонова с автоматическим выбором параметра регуляризации [11].

3. Затем находятся следующие приближения неизвестных функций

$$h_c^{(n)} = h_c^{(n-1)} + d_c^1, g_c^{(n)} = g_c^{(n-1)} + g_c^1, h_d^{(n)} = h_d^{(n-1)} + d_d^1, g_d^{(n)} = g_d^{(n-1)} + g_d^1.$$

Процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие того, что либо норма невязки станет меньше заданного малого числа  $\varepsilon$ , либо превышено число итераций  $N$ .

Для построения подобного рода итерационных процессов важным является вопрос выбора начальных приближений. В данной работе начальные приближения выбирались в классе линейных функций путем минимизации функционала невязки на компактном множестве априорной информации об ограниченности восстанавливаемых функций.

#### 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

На основе разработанного итерационного подхода ниже представлены результаты вычислительных экспериментов по одновременному восстановлению четырех функций: мгновенных и длительных модулей  $h_c(\xi)$ ,  $g_c(\xi)$ ,  $h_d(\xi)$  и  $g_d(\xi)$ , которые входят в состав обезразмеренных комплексных модулей  $C(\xi, \kappa)$  и  $d(\xi, \kappa)$ . Обезразмеренное время релаксации полагалось известным и равным  $\tau_c = \tau_d = 0.1$ . Параметр, характеризующий коэффициент электромеханической связи, полагался равным  $\lambda = 0.5$ . Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижении величины невязки  $\varepsilon = 10^{-4}$ , либо после  $N = 20$  итераций. На рисунках сплошной линией показан график исходной функции, штрихами – начального приближения, точками – восстановленной.

Пример 1. Рассмотрен случай монотонных функций  $h_c(\xi) = 0.5 + 0.5\xi^2$ ,  $g_c(\xi) = 0.6 + 0.5\xi^2$ ,  $h_d(\xi) = 1 - 0.5\xi^2$  и  $g_d(\xi) = 1.1 - 0.5\xi^2$ .



Начальные приближения найдены в виде  $h_c^0(\xi) = 0.5 + 0.5\xi$ ,  $g_c^0(\xi) = 0.6 + 0.5\xi$ ,  $h_d^0(\xi) = 1 - 0.5\xi$  и  $g_d^0(\xi) = 1.1 - 0.5\xi$ , частотный диапазон  $[\kappa_1, \kappa_2] = [1.85, 3.35]$ . Для реконструкции потребовалось 7 итераций. Относительная погрешность реконструкции при этом не превосходит 6%. На рис.1 представлены результаты восстановления.

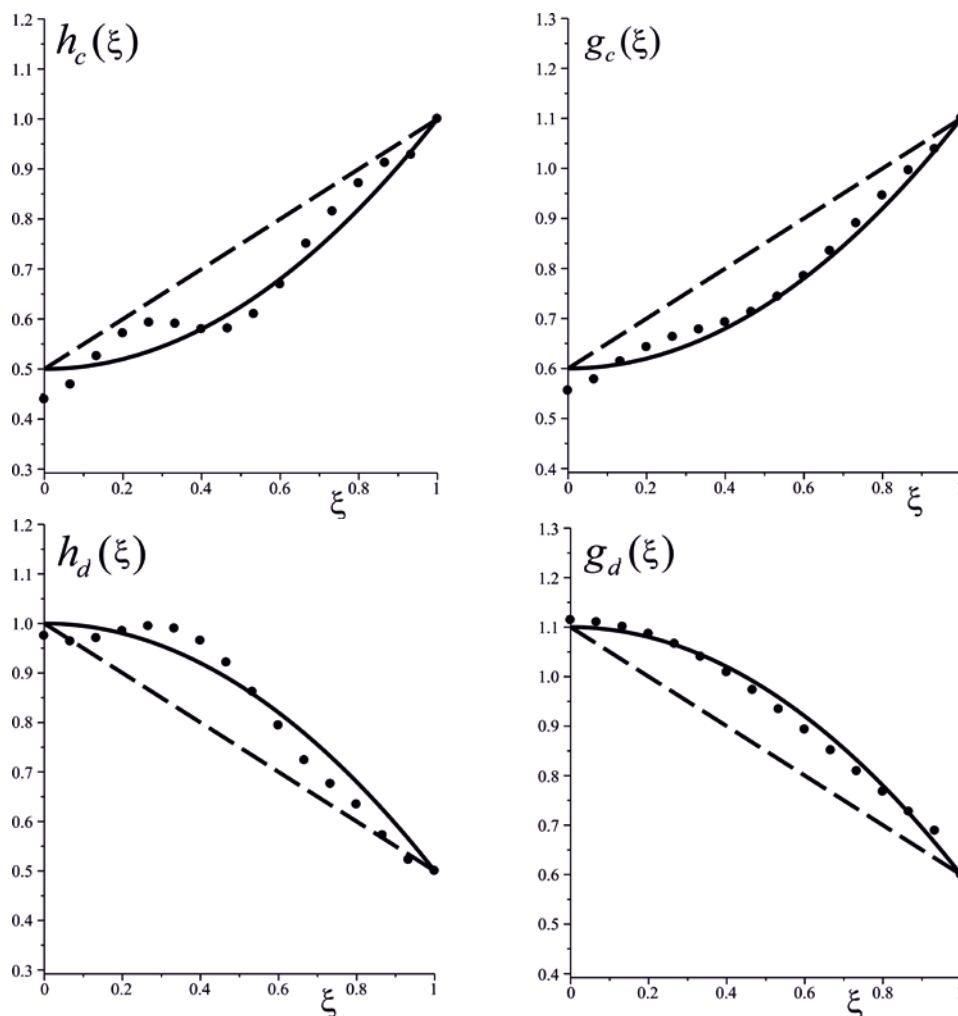


Рис.1. Восстановление монотонных функций.

**Пример 2.** Рассмотрен случай немонотонных функций  $h_c(\xi) = 1 + 0.25\sin(\pi(\xi - 1))$ ,  $g_c(\xi) = 1.1 + 0.25\sin(\pi(\xi - 1))$ ,  $h_d(\xi) = 0.8 + 0.15\cos(2\pi(\xi - 0.5))$  и  $g_d(\xi) = 0.9 + 0.15\cos(2\pi(\xi - 0.5))$ .

Начальные приближения найдены в виде  $h_c^0(\xi) = 1 - 0.2\xi$ ,  $g_c^0(\xi) = 1.1 - 0.2\xi$ ,  $h_d^0(\xi) = 0.7 + 0.2\xi$  и  $g_d^0(\xi) = 0.8 + 0.2\xi$ , частотный диапазон  $[\kappa_1, \kappa_2] = [2.0, 4.2]$ . Для реконструкции потребовалось 9 итераций. Относительная погрешность реконструкции при этом не превосходит 8%. На рис.2 представлены результаты восстановления.

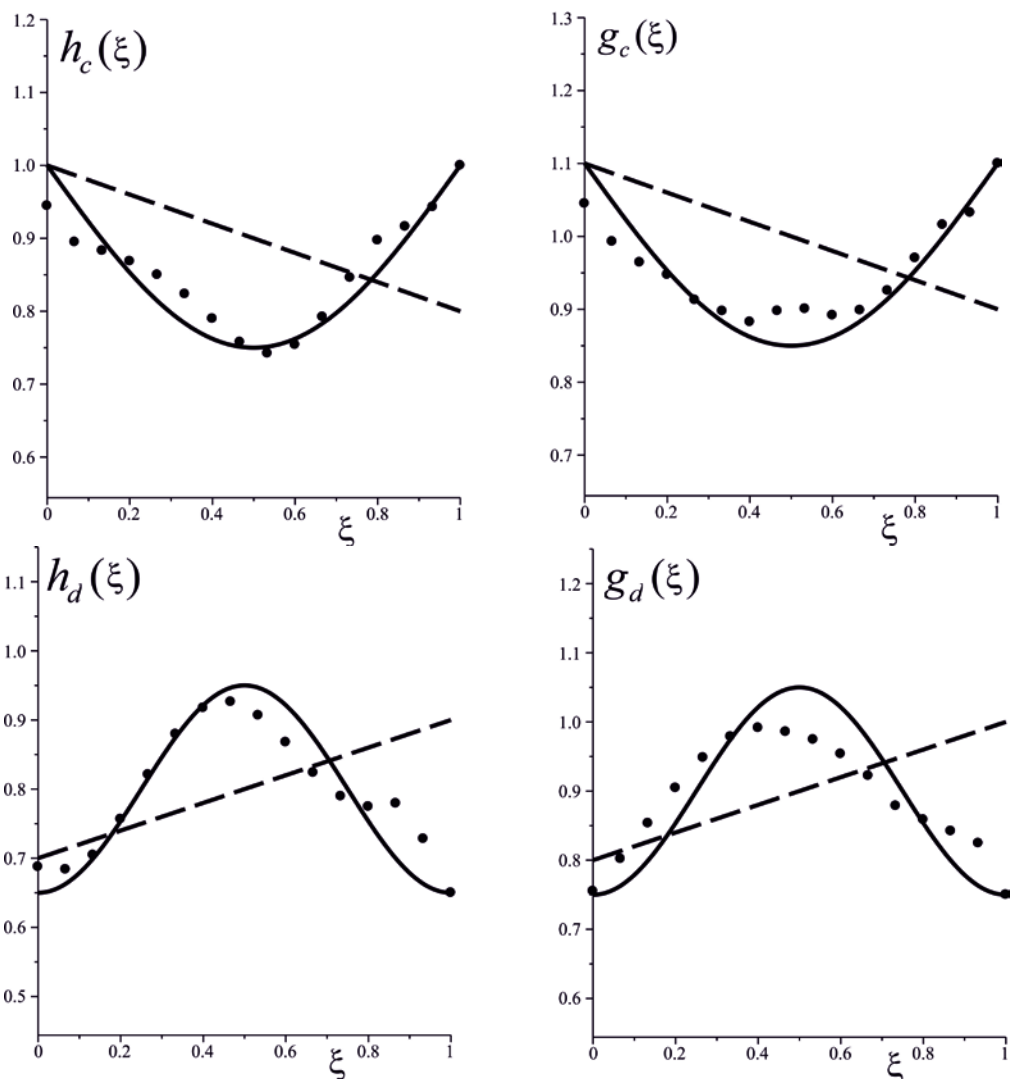


Рис.2. Восстановление немонотонных функций.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты вычислительных экспериментов для различных законов неоднородности, погрешность в которых не превосходит 6-8%, свидетельствуют о достаточной эффективности предлагаемого способа идентификации даже существенно неоднородных свойств функционально-градиентных пьезополимерных стержней. Предлагаемый подход позволяет одновременно восстанавливать и механические и пьезоэлектрические свойства возможностью учета эффекта затухания в исследуемом материале.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Nillson E., Lund A., Hagström B. etc. *Poling and characterization of piezoelectric polymer fibers for use in textile sensors* // *Sensors and Actuators A: Physical*. – 2013. – Vol.201. – P.477-486.
2. Chiu Y.-Y., Lin W.-Y., Wang H.-U., Huang S.-B., Wu M.-H. *Development of a piezoelectric polyvinylidene fluoride (PVDF) polymer-based sensor patch for*

- simultaneous heartbeat and respiration monitoring // Sensors and Actuators A: Physical.* – 2013. – Vol.189. – P.328-334.
3. Martinsa M.S., Correiaa V., Lanceros-Mendezb S., Cabrala J.M., Rocha J.G. *Comparative finite element analyses of piezoelectric ceramics and polymers at high frequency for underwater wireless communications // Procedia Engineering.* – 2010. – Vol.5. – P.99-102.
  4. Gonzalez M.G., Sorichetti P.A., Ciocci Brazzano L., Santiago G.D. *Electromechanical characterization of piezoelectric polymer thin films in a broad frequency range // Polymer Testing.* – 2014. – Vol.37. – P.163-169.
  5. Аникина Т.А., Богачев И.В., Ватульян А.О. *Об идентификации неоднородных характеристик вязкоупругих стержней при изгибных колебаниях // Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2011. – Т.17. – №1. – С.1016-1023.
  6. Богачев И.В., Ватульян А.О., Явруян О.В. *Идентификация свойств неоднородной электроупругой среды // Прикладная математика и механика.* – 2012. – Т.76. – №5. – С.860-866.
  7. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. *Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer // Intern. J. of Solids and Structures.* – 2014. – Vol.51. – No.11-12. – P.2238-2243.
  8. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. *Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел.* – М.: Наука, 1988. – 472 с.
  9. Ватульян А.О. Соловьев А.Н. *Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел.* – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2008. – 176 с.
  10. Кристенсен Р. *Введение в механику композитов.* – М.: Мир, 1974. – 338с.
  11. Ватульян А.О., Беляк О.А., Сухов Д.Ю., Явруян О.В. *Обратные и некорректные задачи.* – Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2011. – 232 с.
  12. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1979. – 288 с.

## REFERENCES

1. Nillson E., Lund A., Hagström B., etc. *Poling and characterization of piezoelectric polymer fibers for use in textile sensors.* Sensors and Actuators A: Physical, 2013, Vol.201, Pp.477-486.
2. Chiu Y.-Y., Lin W.-Y., Wang H.-U., Huang S.-B., Wu M.-H. *Development of a piezoelectric polyvinylidene fluoride (PVDF) polymer-based sensor patch for simultaneous heartbeat and respiration monitoring.* Sensors and Actuators A: Physical, 2013, Vol.189, Pp.328-334.
3. Martinsa M.S., Correiaa V., Lanceros-Mendezb S., Cabrala J.M., Rocha J.G. *Comparative finite element analyses of piezoelectric ceramics and polymers at high frequency for underwater wireless communications.* Procedia Engineering, 2010, Vol.5, Pp.99-102.
4. Gonzalez M.G., Sorichetti P.A., Ciocci Brazzano L., Santiago G.D. *Electromechanical characterization of piezoelectric polymer thin films in a broad frequency range.* Polymer Testing, 2014, Vol.37, Pp.163-169.
5. Anikina T.A., Bogachev I.V., Vatulyan A.O. *Ob identifikatsii neodnorodnykh kharakteristik viazkouprugikh stержnei pri izgibnykh kolebaniyakh [Identification of inhomogeneous characteristics of visco-elastic rods at bending vibration].*

- Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2011, Vol.17, No.1, Pp.1016-1023.
6. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. *Identifikatsiia svoistv neodnorodnoi elektrouprugoi sredy [Identification of the properties of an inhomogeneous electroelastic medium]*. Prikladnaia matematika i mekhanika, 2012, Vol.76, No.5, Pp.860-866.
  7. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. *Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer*. Intern. J. of Solids and Structures, 2014, Vol.51, No.11-12, Pp.2238-2243.
  8. Parton V. Z., Kudriavtsev B. A. *Elektromagnitouprugost' p'ezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel [Electromagnetoelastic of piezoelectric and electroconductive bodies]*. Moskva: Nauka, 1988, 472 p.
  9. Vatul'ian A.O., Solov'ev A.N. *Priamye i obratnye zadachi dlia odnorodnykh i neodnorodnykh uprugikh i elektrouprugikh tel [Direct and inverse problems for homogeneous and inhomogeneous elastic and electroelastic bodies]*. Rostov-na-Donu: YuFU Publ., 2008, 176 p.
  10. Kristensen R. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov. [Introduction to the mechanics of composites]*. Moskva: Mir, 1974, 338 p.
  11. Vatul'yan A.O., Belyak O.A., Sukhov D.Yu., Yavruyan O.V. *Obratnye i nekorrektnye zadachi. [Inverse and incorrect problems]*. Rostov-na-Donu: YuFU Publ., 2011, 232 p.
  12. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach. [Methods for solving ill-posed problems]*. Moskva: Nauka, 1979, 288 p.

Поступила в редакцию 28 марта 2016 года

---

Сведения об авторах:

Богачев Иван Викторович – к.ф.-м.н., Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: [bogachev89@yandex.ru](mailto:bogachev89@yandex.ru)

Ватульян Александр Ованесович – д.ф.-м.н., проф., Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: [vatulyan@math.rsu.ru](mailto:vatulyan@math.rsu.ru)

Дударев Владимир Владимирович – к.ф.-м.н., Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: [dudarev\\_vv@mail.ru](mailto:dudarev_vv@mail.ru)