

**УЧЕТ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ
ФОРМЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ О МАРТЕНСИТНОЙ
НЕУПРУГОСТИ И ПРЯМОМ ПРЕВРАЩЕНИИ В БАЛКЕ,
НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА¹**

Сафронов П.А.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский
университет), г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

В работе решены задачи о фазовом и структурном превращениях в балке сплошного прямоугольного сечения из сплава с памятью формы (СПФ), находящейся под действием внешнего изгибающего момента. Анализ проведен на основе современной модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. Произведен учет асимметрии кривых деформирования для образцов из СПФ при их растяжении и сжатии. Полуобратным методом получено решение задачи в однократно связанной постановке. Построены графики зависимости безразмерного положения нейтральной плоскости для разных значений величины безразмерного изгибающего момента. Установлена зависимость безразмерной кривизны балки от величины параметра фазового состава.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; разносопротивляемость; фазовые переходы; мартенситная неупругость; балки; изгиб

**TENSION-COMPRESSION ASYMMETRY INCORPORATING IN
SOLUTION THE PROBLEM OF MARTENSITIC NON-ELASTICITY
AND DIRECT MARTENSITIC TRANSITION IN BEAMS FROM SHAPE
MEMORY ALLOY UNDER BEND**

Safronov P.A.

Moscow aviation institute (national research center), Moscow, Russia

ABSTRACT

In this paper the problems of phase transition and martensite inelasticity in beam with solid rectangular cross-section from shape memory alloy (SMA) under bend is solved. Investigation is founded on non-linear model of SMA straining in phase and structure transitions. Tension-compression asymmetry of the SMA stress-strain curves is incorporated. By semi-inverse method, solution of the problem in coupled formulation is obtained. Diagrams of dimensionless neutral surface coordinate for the various dimensionless bending moments are shown. Response of martensite volume fraction on dimensionless beam curving is obtained.

Keywords: shape memory alloys; tension-compression asymmetry; phase transitions; martensitic non-elasticity; beams; bend

¹ Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, проект № 14-01-00189.

ВВЕДЕНИЕ

Уникальные свойства сплавов с памятью формы позволяют использовать активные элементы из этого материала во множестве современных устройств. Широкий класс таких устройств представляют различные актуаторы и силовозбудители, рабочее тело которых способно накапливать значительные неупругие деформации во время холостого хода, и «вспоминать» первоначальную форму при нагреве через интервал температур обратного фазового перехода на этапе рабочего хода. Рабочее тело чаще всего представлено стержневым элементом из СПФ, претерпевающим растяжение и сжатие, либо балочным элементом, работающим на изгиб. При этом силовозбудители, имеющие в качестве рабочего тела балочный элемент, обладают более широким спектром кинематических возможностей. Помимо этого, балочные элементы конструкции обладают важным свойством: при их нагружении внешним изгибающим моментом, одна часть сечения балки будет испытывать напряжения растяжения, а оставшаяся часть сечения – напряжения сжатия. Таким образом, если материал балки демонстрирует разнсопротивляемость [1,2], или же несовпадение кривых деформирования (напряжения – относительные деформации) при растяжении и сжатии соответствующих образцов, то игнорирование данного свойства может привести к значительным погрешностям и качественно неверным результатам при решении задач изгиба. Наличие свойства разнсопротивляемости для образцов из СПФ экспериментальным путем установлено как для режима мартенситной неупругости [3] и сверхупругости [4,5], так и для процесса прямого термоупругого превращения [6,7].

Проектирование силовозбудителей, в основе которых лежат балочные элементы, приводит к необходимости решения соответствующих задач об изгибе балок из СПФ. При этом для получения наиболее достоверных результатов отклика балки из СПФ при действии внешнего изгибающего момента, необходимо учитывать свойство разнсопротивляемости. В работах [8,9], в рамках линейной микромеханической модели поведения СПФ решены задачи об изгибе элементов из этого материала без учета разнсопротивляемости. В рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [10-13], аналогичная задача решена в [12,14], однако так же без учета разнсопротивляемости. Разнсопротивляемость СПФ не учитывалась также при решении краевых задач для СПФ в [15-17]. С учетом асимметрии кривых деформирования в работе [18] решена задача об изгибе балки из СПФ в режиме сверхупругости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ БАЛОК ИЗ СПФ

Решения в данной работе построены на основе модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, предложенной в [10,11]. Согласно этой модели девиатор неупругих деформаций определяется дифференциальным уравнением

$$d\varepsilon_{ij}' = \left(\frac{3}{2} \delta_0(\mu_\sigma) \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} (1 - qf(q)) \varphi_1(\sigma_i) + f(q) \varepsilon_{ij}' \right) dq + \frac{3}{2} \delta_0(\mu_\sigma) \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q \varphi_2'(\sigma_i) d\sigma_i \quad (1.1)$$

Здесь σ_i, σ_{ij}' – интенсивность и девиатор тензора напряжений, q – объемная доля мартенситной фазы в аустенитно-мартенситном состоянии, $\rho(\mu_\sigma)$ – функция

параметров вида напряженного состояния, численно соответствующая величине максимально достигаемой интенсивности неупругой деформации при прямом термоупругом мартенситном превращении в условиях данного вида напряженного состояния, $f(q)$ – материальная функция, которая удовлетворяет неравенству $0 \leq f(q) \leq 1/q$. Предполагается различный вид интегральных функций распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ для аустенитного и мартенситного фазового состояния – $\varphi_1(\sigma_i)$ и $\varphi_2(\sigma_i)$ соответственно.

В данной работе рассматриваются активные процессы пропорционального нагружения, положения о которых доказаны в рамках используемой модели в [10,11,19]. Установлено, что в случае, если осуществляется пропорциональное изменение компонент девиатора напряжений, отсутствует разгрузка и выполняется равенство

$$\varphi_1(\sigma_i) = \varphi_2(\sigma_i) = \varphi(\sigma_i) \quad (1.2)$$

то уравнение (1.1), для нулевого начального условия имеет единственное решение

$$\varepsilon_{ij}' = \rho_D \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q \varphi(\sigma_i) \quad (1.3)$$

Наиболее критичным здесь является условие (1.2), которое для большинства СПФ не выполняется [10]. Известны, однако, ряд случаев, для которых для справедливости положения об активных процессах пропорционального нагружения выполнение равенства (1.2) не обязательно. В частности, это случай, когда прямое превращение происходит при постоянных напряжениях. При этом в качестве функции $\varphi(\sigma_i)$ в (1.3) следует использовать $\varphi_1(\sigma_i)$. Если же речь идет о мартенситной неупругости, то выполнение требования (1.2) не обязательно и в выражение для девиатора неупругих деформаций должна входить функция $\varphi_2(\sigma_i)$.

Умножая приведенное выше выражение для девиатора неупругих деформаций само на себя и сворачивая по двум индексам, можно получить

$$\varepsilon_i = \delta_0 \varphi(\sigma_i) q \quad (1.4)$$

Здесь, при рассмотрении явления мартенситной неупругости материальная функция $\varphi_2(\sigma_i) = \Phi_2(\sigma_i / \sigma_0)$ определяется функцией распределения Вейбулла и принимается равной $\Phi_2(x) = 1 - \exp(-x^\alpha)$, $\alpha > 1$, а для прямого термоупругого превращения – функцией распределения Лапласа и равной $\Phi_1(x) = \text{erf}(x / (\sigma_0 \sqrt{2}))$ где параметр σ_0 представляет собой среднеквадратичное отклонение интенсивности микронапряжений; $\varepsilon_i = \sqrt{2\varepsilon_{ij}'\varepsilon_{ij}'}/3$ – интенсивность неупругих деформаций, $\delta_0, \sigma_0, \alpha$ – параметры материала балки, которые имеют, вообще говоря, различные значения для состояния растяжения и сжатия.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ БАЛКИ ИЗ СПФ В РАМКАХ ПРОЦЕССА ПРЯМОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ И ЯВЛЕНИЯ МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ

В работе рассматривается изгиб балок сплошного прямоугольного сечения шириной b и высотой $2h$ в предположении, что параметр фазового состава q распределен равномерно по всему сечению балки. В рамках несвязной постановки задачи, когда не учитывается влияние действующих напряжений на фазовый состав СПФ, такое упрощение правомерно в предположении о равномерном распределении температуры по сечению, что соответствует медленным процессам, когда температура за счет явления теплопроводности успевает выравниваться по сечению. В рамках связной постановки задачи предположение о равномерном распределении параметра фазового состава по сечению соответствует определенному распределению температуры по сечению, которое может быть найдено с использованием следующих из законов термодинамики зависимостей параметра фазового состава от температуры и напряжений [20,21]. Это предположение полностью правомерно при рассмотрении явления мартенситной неупругости. При равномерном распределении по сечению параметра фазового состава можно пренебречь деформациями объемного эффекта реакции фазового перехода, не оказывающими влияния на изгибное напряженно-деформированное состояние. Упругие деформации так же не учитываются в силу их малости по сравнению с фазово-структурными деформациями. Пренебрегается и деформациями поперечного сдвига. Таким образом $\varepsilon_i = |\varepsilon|$, где ε - продольная деформация.

Относительно силовой стороны процесса изгиба балки, рассмотрение проводится в рамках гипотез Бернулли-Эйлера, согласно которым не учитывается влияние касательных и поперечных нормальных напряжений на определяющие соотношения материала. Таким образом, в определяющих соотношениях $|\sigma| = \sigma_i$, где σ – продольные нормальные напряжения.

В рамках гипотезы плоских сечений продольная деформация определяется как

$$\varepsilon = kz, \quad (2.1)$$

где k – кривизна нейтральной плоскости балки, z - поперечная координата, отсчитываемая от нейтральной плоскости.

Согласно выражению для интенсивности неупругих деформаций (1.4), выражение (2.1) может быть представлено в виде

$$\varepsilon_i = \delta_0 q \Phi(\sigma_i / \sigma_0) \quad (2.2)$$

Используя различные значения параметров материала δ_0 и σ_0 для растяжения и сжатия, выражение (2.2) может быть распространено на случай разносопротивляемости

$$\begin{cases} \varepsilon_i = \delta_t q \Phi_t(\sigma_i / \sigma_{0t}), \sigma > 0 \\ \varepsilon_i = \delta_c q \Phi_c(\sigma_i / \sigma_{0c}), \sigma < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь и в дальнейшем нижним индексом c обозначены величины, соответствующие сжатию, и индексом t – соответствующим растяжению. Функции Φ_t и Φ_c доопределяем нечетным образом для отрицательных значений аргумента: $\Phi_t(-x) = -\Phi_t(x)$ и $\Phi_c(-x) = -\Phi_c(x)$. Согласно (2.1) и (2.3), а также

принятым гипотезам, соотношения для продольных нормальных напряжений в сечении балки для зон растяжения и сжатия могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \sigma_t = \sigma_{0t} \Phi_t^{-1}(\kappa z / (q\delta_t)), \sigma > 0 \\ \sigma_c = \sigma_{0c} \Phi_c^{-1}(\kappa z / (q\delta_c)), \sigma < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь функция Φ_t^{-1} – обратная к функции Φ_t , Φ_c^{-1} – к функции Φ_c . Таким образом аргументы функций распределения ограничены значениями $-1 \leq \kappa z / (q\delta_t) \leq 1$ в случае растяжения, и $-1 \leq \kappa z / (q\delta_c) \leq 1$ в случае сжатия. Изгибающий момент в рассматриваемом сечении балки определяется согласно принципу суперпозиции интегралов от сжимающих и растягивающих напряжений по соответствующим областям сечения F_c и F_t , и может быть записан в виде

$$M = \sigma_{0c} \int_{F_c} \Phi_c^{-1} \left(\frac{\kappa z}{q\delta_c} \right) z dz + \sigma_{0t} \int_{F_t} \Phi_t^{-1} \left(\frac{\kappa z}{q\delta_t} \right) z dz \quad (2.5)$$

В силу того, что материал балки является разносопротивляющимся растяжению и сжатию, положение нейтральной плоскости балки не будет отвечать классической постановке задачи изгиба балки, и не будет совпадать с осью симметрии балки. Поэтому вводится параметр R , который определяет высоту той области сечения балки, которая испытывает напряжения растяжения, рис.1. Другими словами, параметр R может трактоваться как поперечная координата определяющая положение нейтральной плоскости, если начало отсчета этой координаты будет принадлежать той грани балки, которая находится в области сечения, испытывающей напряжения растяжения. Таким образом, выражение для изгибающего момента (2.5) может быть переписано в виде

$$\mu = r^2 \int_0^1 \Phi_t^{-1} \left(\frac{y\xi_t r}{q\delta_t} \right) \xi_t d\xi_t + \frac{\sigma_{0c}}{\sigma_{0t}} (2-r)^2 \int_0^1 \Phi_c^{-1} \left(\frac{y\xi_c (2-r)}{q\delta_c} \right) \xi_c d\xi_c \quad (2.6)$$

В выражении (2.6) нашли отражение следующие безразмерные величины: $\mu = M / \sigma_{0t} h^2 b$, $r = R / h$, $\xi_t = z / R$ и $\xi_c = z / (2h - R)$, а так же безразмерная кривизна $y = kh$, которая равна продольной деформации внутреннего слоя балки, отстоящего от нейтральной плоскости на величину h .



Рис.1.

Соотношение для нахождения положения нейтральной плоскости может быть получено из уравнения равновесия отсеченной части балки в проекции на ее продольную ось

$$\sigma_{0c} \int_{-(2h-R)}^0 b(z) \Phi_c^{-1} \left(\frac{\kappa z}{q\delta_c} \right) dz + \sigma_{0t} \int_0^R b(z) \Phi_t^{-1} \left(\frac{\kappa z}{q\delta_t} \right) dz = 0 \quad (2.7)$$

Предполагается пропорциональный характер зависимости кривизны балки от величины параметра фазового состава

$$y = q\lambda(\mu) \quad (2.8)$$

Подстановка соотношения (2.8) в уравнения (2.6), (2.7) позволяет исключить параметр фазового состава из последних. Применяя установленные выражения для безразмерных величин в (2.7), можем записать полную систему уравнений

$$\begin{cases} \mu = r^2 \int_0^1 \Phi_t^{-1} \left(\frac{\lambda \xi_t r}{\delta_t} \right) \xi_t d\xi_t + \frac{\sigma_{0c}}{\sigma_{0t}} (2-r)^2 \int_0^1 \Phi_c^{-1} \left(\frac{\lambda \xi_c (2-r)}{\delta_c} \right) \xi_c d\xi_c \\ \sigma_{0t} r \int_0^1 \Phi_t^{-1} \left(\frac{\lambda \xi_t r}{\delta_t} \right) d\xi_t = \sigma_{0c} (2-r) \int_0^1 \Phi_c^{-1} \left(\frac{\lambda \xi_c (2-r)}{\delta_c} \right) d\xi_c \\ y = q\lambda(\mu) \end{cases} \quad (2.9)$$

В рамках принятых в данной работе гипотез, блок уравнений (2.9) позволяет описать процесс прямого термоупругого превращения при действии постоянного изгибающего момента, а также явление мартенситной неупругости при нагружении балки внешним возрастающим изгибающим моментом. Для заданной величины безразмерного изгибающего момента μ , безразмерная координата нейтральной плоскости r и значение параметра $\lambda(\mu)$ определяются из совместного решения первых двух уравнений (2.9), которые не зависят от параметра q . Таким образом, положение нейтральной плоскости, задаваемое величиной r , не зависит от параметра фазового состава q . Подстановка соотношения (2.8) в (2.4) показывает независимость действующих напряжений от параметра q , что свидетельствует о выполнении условия справедливости положения об активных процессах пропорционального нагружения при решении задачи о прямом превращении.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МОНОТОННО ВОЗРАСТАЮЩЕГО ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

Для решения задачи о явлении мартенситной неупругости в балке из СПФ при действии внешнего изгибающего момента с помощью соотношений (2.9), параметр объемной доли мартенситной фазы в последнем уравнении необходимо принять равным единице. В качестве интегральной функции распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ используется распределение Вейбулла $\Phi(x) = 1 - \exp(-x^\alpha)$, $\alpha \geq 1$, $\Phi^{-1}(z) = (-\ln(1-z))^{1/\alpha}$. Для заданного массива значений безразмерного изгибающего момента, ограниченного некоторой допустимой величиной $0 \leq \mu \leq \mu_{\max}$, первые два уравнения решаются совместно, в результате чего получаются соответствующие массивы значений для функций $\lambda(\mu)$ и $r(\mu)$. Далее, для известного набора значений функции $\lambda(\mu)$ из последнего уравнения (2.9) определяются соответствующий набор значений безразмерной кривизны балки y .

Второе уравнение блока (2.9) имеет особенность в области малых значений безразмерного изгибающего момента μ . Так, если $\mu \rightarrow 0$, значение безразмерной

кривизны балки так же стремится к нулю $y \rightarrow 0$, следовательно, и $\lambda = \lambda(\mu) \rightarrow 0$. Таким образом, подинтегральные выражение обеих частей уравнения стремятся к нулю, в результате чего получается неопределенность типа $0/0$.

Представим функцию $\Phi^{-1}(z)$ в виде ряда Тейлора, при этом ограничимся рассмотрением только первого члена в силу малости изгибающего момента μ

$$\Phi^{-1}(z) = (-\ln(1-z))^{1/\alpha} \approx z^{1/\alpha} + \dots \quad (3.1)$$

Для удобства записи дальнейших рассуждений обозначим $1/\alpha = \bar{\alpha}$. С учетом этого, а так же (3.1), уравнение равновесия отсеченной части балки в проекции на ее продольную ось примет вид

$$\sigma_{0r} r \int_0^1 \left(\frac{\lambda \xi_r r}{\delta_r} \right)^{\bar{\alpha}_r} d\xi_r = \sigma_{0c} (2-r) \int_0^1 \left(\frac{\lambda \xi_c (2-r)}{\delta_c} \right)^{\bar{\alpha}_c} d\xi_c \quad (3.2)$$

Интегрируем соотношения (3.2) в заданных пределах и производим группировку искомых параметров, можно получить

$$\lambda^{\bar{\alpha}_r} r^{\bar{\alpha}_r+1} = D \lambda^{\bar{\alpha}_c} (2-r)^{\bar{\alpha}_c+1} \quad (3.3)$$

где $D = \frac{\sigma_{0c}}{\sigma_{0r}} \frac{\delta_r^{\bar{\alpha}_r}}{\delta_c^{\bar{\alpha}_c}} \frac{\bar{\alpha}_r+1}{\bar{\alpha}_c+1}$ – некоторый параметр, определяемый только константами

материала. Таким образом, (3.3) позволяют определить положение нейтральной плоскости в области малых значений изгибающего момента. Пусть, сначала, выполняется неравенство $\bar{\alpha}_r > \bar{\alpha}_c$. В этом случае из (3.3) получается

$$\frac{\lambda^{\bar{\alpha}_r}}{\lambda^{\bar{\alpha}_c}} = D \frac{(2-r)^{\bar{\alpha}_c+1}}{r^{\bar{\alpha}_r+1}} \quad (3.4)$$

Здесь $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda^{\bar{\alpha}_r}}{\lambda^{\bar{\alpha}_c}} = 0$, следовательно и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} D \frac{(2-r)^{\bar{\alpha}_c+1}}{r^{\bar{\alpha}_r+1}} = 0$.

Из последнего выражения с учетом ограниченности возможных значений для положения нейтральной плоскости, $0 \leq r \leq 2$, получим: при $\lambda(\mu) \rightarrow 0$ и $\bar{\alpha}_r > \bar{\alpha}_c$, $r \rightarrow 2$.

Пусть теперь $\bar{\alpha}_r < \bar{\alpha}_c$. В этом случае

$$\frac{\lambda^{\bar{\alpha}_c}}{\lambda^{\bar{\alpha}_r}} = \frac{1}{D} \frac{r^{\bar{\alpha}_r+1}}{(2-r)^{\bar{\alpha}_c+1}} \quad (3.5)$$

Здесь $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda^{\bar{\alpha}_c}}{\lambda^{\bar{\alpha}_r}} = 0$, следовательно и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{D} \frac{r^{\bar{\alpha}_r+1}}{(2-r)^{\bar{\alpha}_c+1}} = 0$. С учетом ограниченности

возможных значений $0 \leq r \leq 2$, получим: при $\lambda \rightarrow 0$ и $\bar{\alpha}_r < \bar{\alpha}_c$, $r \rightarrow 0$.

Следует отметить, что при $\bar{\alpha}_r = \bar{\alpha}_c$, левая и правая части выражений (3.4)-(3.5) будут стремиться к единице, из чего положение нейтральной плоскости для в области малых значений изгибающих моментов стремится к

$$r \rightarrow 2 \frac{\sqrt[\bar{\alpha}_c+1]{D}}{\sqrt[\bar{\alpha}_c+1]{D} + 1} \quad (3.6)$$

Ниже представлены результаты численного моделирования явления мартенситной неупругости в балке из СПФ при действии изгибающего момента.

На рис.2 и 3 приведены графики зависимости безразмерной кривизны y и безразмерной координаты положения нейтральной плоскости r от величины безразмерного изгибающего момента μ . Значения параметров материала для соответствующих кривых указаны в таблице 1.

Таблица 1.

Номер кривой	Вид нагрузки	δ , доли	σ_0 , МПа	α
кривая 1	растяжение	0,0286	144,7	3,847
	сжатие	0,0132	216,6	4,88
кривая 2	растяжение	0,0286	144,7	3,847
	сжатие	0,0209	216,6	4,88
кривая 3	растяжение	0,0286	144,7	3,847
	сжатие	0,0132	180,65	4,88
кривая 4	растяжение	0,0286	144,7	3,847
	сжатие	0,0132	216,6	4,3635
кривая 5	растяжение	0,0286	144,7	3,847
	сжатие	0,019	190,6	2,2
кривая 6	растяжение	0,0286	144,7	3,847
	сжатие	0,0286	144,7	3,847

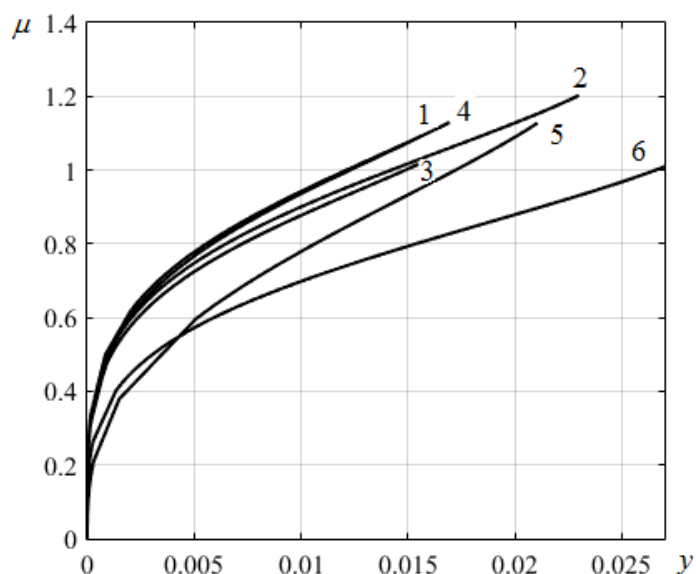


Рис.2.

Параметры материала для кривой 1 соответствуют плочинке из равноатомного никелида титана ($Ni_{50}Ti_{50}$), прошедшего температурную обработку – отжиг при температуре $450^{\circ}C$ в течение 30 минут. Для оценки влияния эффекта разносопротивляемости материала на поведение рассматриваемых графических зависимостей, параметры материала, соответствующие сжатию – варьируются. Кривые 2-4 демонстрируют влияние каждого из параметров на поведение искомых графиков функций. Параметры материала 5 установлены таким образом, что бы кривые деформирования для растяжения и сжатия пересекались в области небольших значений напряжений. Кривая 6 показывает качественные различия в решении задачи

изгиба балки с учетом разнсопротивляемости и без, поскольку ее параметры при сжатии аналогичны параметрам при растяжении.

Поскольку при испытаниях образцы из СПФ демонстрируют меньшую податливость при сжатии, чем при растяжении, очевидно, что учет разнсопротивляемости материала при изгибе балки приведет к уменьшению прогиба, а соответственно и кривизны для фиксированного значения изгибающего момента, по сравнению с одинаково сопротивляющимся материалом, имеющим константы, соответствующие растяжению. Так, из различия кривых 1 и 6, рис.2 заключим, что для средних значений безразмерного изгибающего момента μ , различия в безразмерных прогибах достигают 100%.

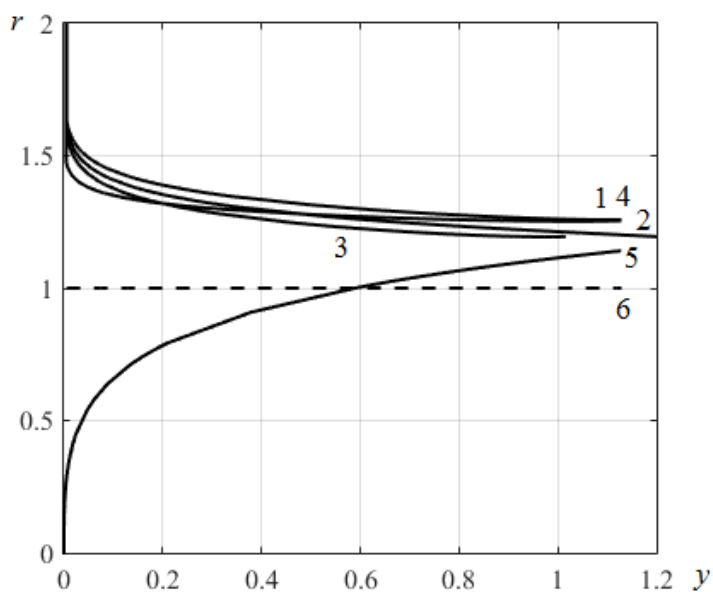


Рис.3.

Безразмерные координаты положения нейтральных плоскостей для материалов 1-4, устанавливаемых кривыми с соответствующими номерами, находятся близко друг к другу, и все достигают предельного значения $r = 2$ в окрестности малых величин безразмерного изгибающего момента. Так же на рис.3 видно, что кривая 5, для которой реализовано свойство перекрещивания диаграмм деформирования при растяжении и сжатии [22] пересекает ось симметрии балки. Для линии 6, аналогично классической постановке задачи изгиба балок без учета разнсопротивляемости материала, положение нейтральной плоскости не зависит от величины изгибающего момента, и совпадает с осью симметрии балки.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРЯМОМ ТЕРМОУПРУГОМ ПРЕВРАЩЕНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОГО ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

Как было показано ранее, в случае прямого превращения под действием постоянного изгибающего момента кривизна пропорциональна параметру фазового состава (2.8), а напряжение и координата нейтральной плоскости не зависят от параметра фазового состава. Поэтому ниже исследуются

зависимости коэффициента пропорциональности для кривизны λ и координаты нейтральной плоскости r от безразмерного изгибающего момента μ .

В качестве интегральной функции распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ используется распределение Лапласа $\Phi(x) = \text{erf}\left(x / \sigma_0 \sqrt{2}\right)$. В данной постановке максимальное значение безразмерного изгибающего момента так же ограничено некоторой величиной $0 \leq \mu \leq \mu_{\max}$, зависящей от параметров материала. Первые два уравнения системы (2.9) решаются совместно, в результате чего находятся значения функций $\lambda(\mu)$ и $r(\mu)$. Далее, подставляя найденное значение функции $\lambda(\mu)$ в последнее уравнение, устанавливается зависимость безразмерной кривизны балки y от параметра объемной доли мартенситной фазы.

Как уже отмечало ранее, второе уравнение блока (2.9) имеет особенность в области малых значений безразмерного изгибающего момента. Представим функцию $\Phi^{-1}(z)$ в виде ряда Тейлора, при этом ограничимся рассмотрением только первого члена

$$\Phi^{-1}(z) \approx \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} z + \dots \quad (4.1)$$

Подставляя разложение (4.1) во второе уравнение системы (2.9) и проводя интегрирование по заданным пределам, получим следующее выражение для предельного значения положения нейтральной плоскости

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_{0r}}{2\delta_t} \lambda r^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_{0c}}{2\delta_c} \lambda (2-r)^2 \quad (4.2)$$

Выражение (4.2) сводится к квадратному уравнению относительно r

$$r^2 - A(2-r)^2 = 0 \quad (4.3)$$

где $A = \frac{\sigma_{0c} \delta_t}{\sigma_{0r} \delta_c}$ – некоторый параметр, определяемый только константами материала. Таким образом

$$r_{1,2} = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt{A \pm 1}}, \quad (4.4)$$

где $0 \leq r \leq 2$. В силу этого неравенства в (4.4) надо брать знак плюс. Итак, если в качестве функции распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ выступает функция Лапласа, используемая для описания процесса прямого термоупругого превращения, то предельное значение безразмерного положения нейтральной плоскости в окрестности малых значений изгибающих моментов определяется только параметрами материала.

На рис.4 и 5 представлены результаты численного моделирования для задачи изгиба балки из СПФ, претерпевающей прямое термоупругое фазовое превращение под действием постоянного изгибающего момента. Построены графики зависимости безразмерного параметра $\lambda(\mu)$ (рис.4) и безразмерной координаты нейтральной плоскости r (рис.5) для различных значений безразмерного изгибающего момента μ . Использование функции Лапласа в качестве интегральной функции распределения интенсивности микронапряжений позволяет производить учет разнородности материала

по двум параметрам: среднеквадратичному уклонению микронапряжений σ_0 и максимальной деформации прямого мартенситного превращения δ . Для образцов плющинки из равноатомного никелида титана экспериментальным путем были установлены следующие значения этих параметров $\sigma_{0r} = 169$ МПа и $\delta_t = 0.056$.

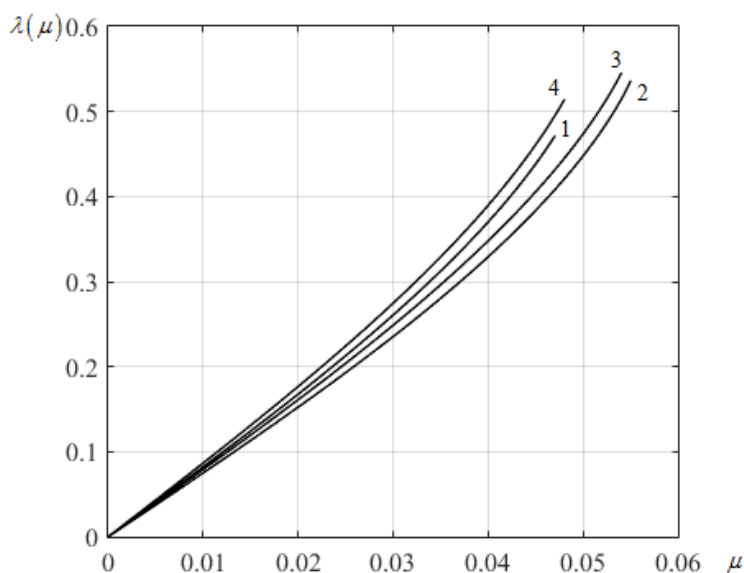


Рис.4.

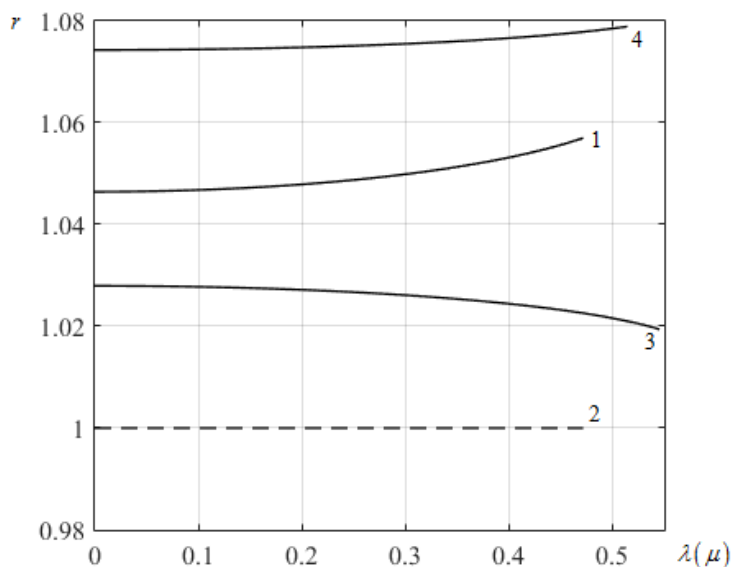


Рис.5.

Для аппроксимации диаграммы деформирования также была использована функция Лапласа, а деформации объемного эффекта реакций не учитывались. Испытания образцов проводились только на растяжение, при этом они имели рабочую часть прямоугольного сечения площадью 2 мм^2 и проходили температурную обработку – отжиг в течение 30 минут при 450°C . Параметры материала для аппроксимации диаграммы деформирования при сжатии в данной работе варьируются для оценки влияния учета свойства разносопротивляемости.

Численные значения параметров для соответствующих кривых на рис.4,5 указаны в таблице 2.

Из таблицы 2 видно, что кривые под номером 2 на рис.4 и 5 соответствуют материалу, одинаково сопротивляющемуся растяжению и сжатию. Кривые, обозначение номерами 1 и 3 на рис.4 и 5 показывают вклад каждого из двух параметров в поведение рассматриваемых графических зависимостей. Кривая 4 соответствует разносопротивляющемуся материалу, для которого оба параметра при сжатии варьируются.

Таблица 2.

Номер кривой	Вид нагрузки	δ , доли	σ_0 , МПа
кривая 1	растяжение	0,056	169
	сжатие	0,0465	169
кривая 2	растяжение	0,056	169
	сжатие	0,056	169
кривая 3	растяжение	0,056	169
	сжатие	0,056	189
кривая 4	растяжение	0,056	169
	сжатие	0,0465	189

Отметим, что коэффициент, на который была уменьшена величина максимальной деформации прямого превращения при сжатии относительно деформации при растяжении, коррелирует с данными экспериментов, проведенных в работе [23]. При испытании образцов из сплава на основе CuAlZnMn оказалось, что различие в максимальных прогибах прямого термоупругого мартенситного превращения под действием постоянных растягивающих и сжимающих напряжений в 300МПа составляет порядка 17%. Эта разница отражена в различном поведении кривых 1 и 2.

Из рис.4 видно, что учет свойства разносопротивляемости (кривая 4) ведет к уменьшению деформативности балки на 10-20% для средних значений безразмерного изгибающего момента относительно классической постановки задачи изгиба, (кривая 2), для которой асимметрия кривых деформирования не учитывается. Согласно положениям кривых 1 и 3, учет свойства разносопротивляемости даже по одному параметру материала приводит к уменьшению податливости балки.

Как и следовало ожидать, кривая 4 на рис.5 расположена несколько выше остальных кривых, поскольку для нее учитываются сразу оба параметра для сжатия, отличных от растяжения. Кривая 2 на рис.5 отвечает классической постановке задачи изгиба, при которой свойство разносопротивляемости материала не учитывается, отсюда ее положение совпадает с осью симметрии балки. В целом, положение нейтральной плоскости не отклоняется более чем на 5% высоты сечения балки от ее оси симметрии. Отметим, что предельные значения безразмерного параметра r в области малых значений безразмерного изгибающего момента были установлены согласно соотношению (4.4) и отражены на рис.5.

ВЫВОДЫ

При решении задачи об изгибе балки из СПФ с учетом разносопротивляемости этого материала установлено существенное снижение

податливости балки во всем спектре действующего изгибающего момента в сравнении с классической постановкой, в которой асимметрия кривых деформирования не учитывается, а в качестве констант материала используются значения, характерные для растяжения. Аналогичные результаты были получены относительно задачи о прямом термоупругом мартенситном превращении в балке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента. Для обеих задач установлены явные зависимости для определения предельных значений положения нейтральной плоскости в области малых изгибающих моментов, показано влияние параметров материала, как каждого по отдельности, так и сразу нескольких, на кривизну балки и на положение нейтральной плоскости. Влияние разносопротивляемости проявляются существенно больше для нагружения в режиме мартенситной неупругости, чем для процессов прямого превращения под действием постоянного изгибающего момента.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломакин Е.В.* Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т.10. – №5. – С.41-52.
2. *Lomakin E.V.* Constitutive models of mechanical behavior of media with stress state dependent material properties // Adv. Structur. Materials. – 2011. – Vol.7. – P.339-350.
3. *Sittner D., Liu Y., Novak V.* On the origin of Luders-like deformation on NiTi shape memory alloys // J. Mech. Phys. Solids. – 2005. – Vol.53. – P.4325-4338.
4. *Sehitoglu H., Zhang X.Y., Chumlyakov Y.I., Karaman I., Gall K., Maier H.J.* Observations on stress-induced transformations in NiTi alloys / IUTAM Symposium on mechanics of martensitic phase transformation in solids. – 2002. – P.103-109.
5. *Thamburaja P., Anand L.* Polycrystalline shape-memory materials: effect of crystallographic texture // J. Mech. Phys. Solids. – 2001. – Vol.49. – P.709-737.
6. *Gall K., Sehitoglu H., Anderson R., Karaman I., Chumlyakov Y.I., Kireeva I.V.* On the mechanical behavior of single crystal NiTi shape memory alloys and related polycrystalline phenomenon // Materials Science and Engineering. – 2001. – Vol.317. – P.85-92.
7. *Lexcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S.* About modelling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions // Intern. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol.43. – P.613-626.
8. *Мовчан А.А.* Учет переменной упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Известия АН. МТТ. – 1998. – №1. – С.79-90.
9. *Мовчан А.А.* Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы // ПМТФ. – 1998. – Т.39. – №1. – С.87-97.
10. *Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г.* Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – №3. – С.118-130.
11. *Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л.* Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – №2. – С.44-56.

12. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – №1. – С.37-53.
13. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – №2. – С.78-95.
14. Мовчан А.А., Тант Зин Аунг, Мовчан И.А. Решение задач изгиба балок из сплавов с памятью формы в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов при фазовых и структурных превращениях // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т.15. – №3. – С.422-436.
15. Саганов Е.Б. Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №3. – С.454-468.
16. Машихин А.Е. Задача о контакте цилиндра из сплава с памятью формы с упругой трубой при обратном фазовом превращении // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.624-636.
17. Саганов Е.Б. Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.663-674.
18. Mirzaeifar R., Des Roches R., Yavari A., Gall K. On superelastic bending of shape memory alloy beams // Intern. J. of Solids and Structures. – 2013. – Vol.50 – P.1664-1680.
19. Мовчан А.А., Казарина С.А. Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
20. Мовчан А.А., Казарина С.А., Мишустин И.В., Мовчан И.А. Термодинамическое обоснование модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Деформации и разрушение материалов. – 2009. – №8. – С.2-9.
21. Мовчан А.А., Со Н. Термодинамическое описание поведения сплавов с памятью формы с помощью аддитивного потенциала Гиббса // ПМТФ. – 2006. – Т.47. – №4. – С.98-103.
22. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck J., Delaey L. Asymmetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys // Acta Mater. – 1998. – Vol.46. – N12. – P.4325-4338.
23. Sittner P., Novak V. Anisotropy of Cu-based shape memory alloys in tension/compression thermomechanical loads // Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol. – 1999. – Vol.121. – N1. – P.48-55.

Поступила в редакцию 25 ноября 2015 года.

Сведения об авторе:

Сафронов Павел Андреевич – асп., Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: www-midnight-express@yandex.ru