

УДК 539.3; 534.1

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕРМОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ, СОЕДИНЕННОГО С КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ, ПРИ СОЛНЕЧНОМ НАГРЕВЕ¹

Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н.*

*ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет), г. Москва, Россия***ФГБУН Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва,
Россия*

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются изгибные термоупругие колебания тонкостенного стержня с круговым поперечным сечением, соединенного с космическим аппаратом (КА) и подвергающегося солнечному нагреву. Нестационарная температура стержня определяется из уравнения теплопроводности с учетом изменений углов падения солнечных лучей на поверхность стержня за счет его изгиба и поворота КА.

Для решения связанной нестационарной задачи термоупругости и теплопроводности тонкостенного стержня используется метод конечных элементов (МКЭ). Выполнены расчеты колебаний системы при выходе из тени и при повороте КА.

Ключевые слова: космические аппараты; тонкостенные стержни; солнечный нагрев; термоупругие колебания; метод конечных элементов

NONSTATIONAR THERMOELASTIC OSCILLATIONS OF THE CONNECTED WITH THE SPACECRAFT THIN-WALLED ROD WITH SOLAR HEATING

Grishanina T.V., Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N.*

*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia***Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

SUMMARY

The bending thermoelastic vibrations of thin-walled rod with a circular cross-section connected to the spacecraft (SC) and exposed to solar heat are considered. Transient temperature of the rod is determined by the heat equation, taking into account changes of the incidence angles of sunlight on the surface of the rod due to its bending and turns of the spacecraft.

To solve the related problem of non-stationary thermoelasticity, and thermal conductivity of thin-walled rod the finite element method (FEM) is used. The calculations of vibrations of the system due to exit of the shadow and turning the spacecraft are conducted.

Key words: space vehicles; thin-wall rods; solar heating; thermoelastic vibrations; finite element method

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-01653).

ВВЕДЕНИЕ

На космических аппаратах в качестве антенн, удлинителей для различных приборов, а также штанг гравитационной стабилизации могут использоваться выдвигаемые тонкостенные стержни, образуемые из навитой на барабан двухслойной предварительно напряженной металлической ленты. Если два слоя ленты, сваренных по боковым кромкам, после схода с барабана выгибаются в разные стороны, то получается трубчатый стержень с замкнутым контуром поперечного сечения, близким по форме к окружности. Такие стержни могут иметь большую длину. При поворотах КА и под воздействием солнечных лучей они совершают термоупругие колебания. При определенных условиях в результате взаимодействия упругих и инерционных сил и температуры тонкостенные стержни, подвергающиеся солнечному нагреву, могут быть динамически неустойчивыми, совершая колебания типа термоупругого флаттера.

В работе [1] на основании дистанционных измерений было описано динамическое поведение спутника со стержнями гравитационной стабилизации после выхода из тени Земли в результате солнечного нагрева стержней, вызывающего их термоупругие колебания. Нестационарные колебания в определенных положениях спутника относительно направления солнечных лучей становились динамически неустойчивыми (термоупругий флаттер), что приводило к переворачиванию спутника. В последующих работах [2,3] и др. были выполнены аналитические исследования динамической неустойчивости консольно-закрепленных тонкостенных стержней при солнечном нагреве в линеаризованной постановке с использованием разложения поперечных перемещений в ряд по собственным формам колебаний с оценками в одночленном и двухчленном приближениях.

В [4] была рассмотрена в нелинейной постановке статическая задача сильного изгиба длинного пустотелого тонкостенного стержня кругового поперечного сечения, подвергающегося солнечному нагреву с учетом влияния изгиба на угол падения солнечных лучей на поверхность стержня и с учетом внешнего и внутреннего излучения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоское нестационарное движение КА с тонкостенным стержнем круглого поперечного сечения с присоединенным на конце стержня грузом. Под действием приложенного к КА управляющего момента $M_0(t)$ и нестационарного солнечного нагрева стержень совершает термоупругие колебания в плоскости падения солнечных лучей и поворачивается вместе с КА на угол $\varphi(t)$ относительно центра масс системы КА плюс стержень. При этом центр масс системы остается неподвижным. Стержень соединен с КА с помощью упруго-вязкого шарнира и в исходном недеформированном состоянии при постоянной температуре является прямолинейным. Стержень направим вдоль оси x связанной с КА подвижной (вращающейся с угловой скоростью $\dot{\varphi}(t)$) системы координат Ox с началом в центре масс, рис.1. Поперечные перемещения стержня $u(x,t)$ относительно оси x , возникающие при вращении и термоупругих колебаниях, будем считать малыми, а его продольными перемещениями будем пренебрегать. Для стержня со свободным концом, когда отсутствует стеснение продольных перемещений и продольная сила в его поперечных сечениях близка к

нулю, колебания можно считать малыми при $|\vartheta| \leq 0,5$ рад, где $\vartheta = \partial v / \partial x$. Угол φ может быть большим.

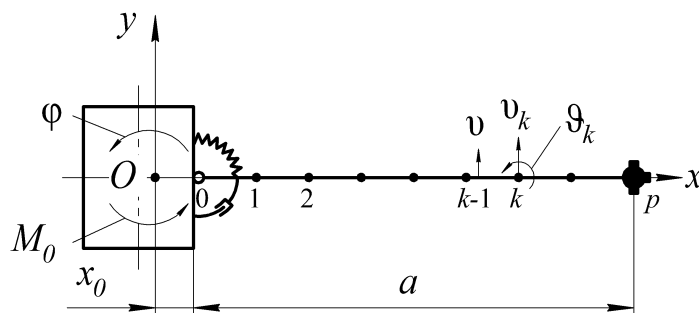


Рис.1. Модель космического аппарата.

Косинус угла между постоянным направлением под углом γ солнечных лучей в неподвижной системе координат O_*XY и нормалью к поверхности повернутого на угол φ и искривленного стержня с круглым недеформируемым поперечным сечением равен $\cos(\gamma - \varphi - \vartheta) \cos \theta$, рис. 2.

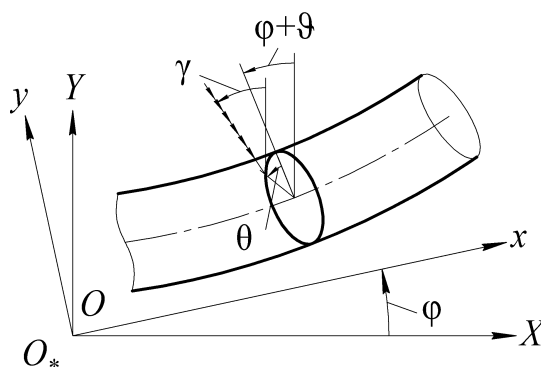


Рис.2. Направление теплового потока от прямого солнечного излучения.

Тепловой поток от прямого солнечного излучения на единицу внешней поверхности оболочки

$$q^* = \nu A_s S_0 \frac{L_0^2}{L^2} \cos(\gamma - \varphi - \vartheta) \cos \theta \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \geq \theta \geq -\frac{\pi}{2},$$

$$q^* = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{2},$$
(1)

где A_s – коэффициент поглощения внешней поверхности стержня; $S_0 = 1400$ Вт/м²; $L_0 = 149 \cdot 10^9$ м – среднее расстояние от Земли до Солнца; L [м] – расстояние от КА до Солнца, [5]; $\nu(t)$ – коэффициент, учитывающий затененность стержня ($0 \leq \nu \leq 1$; $\nu = 0$ в тени планеты или КА и $\nu = 1$ при прямом солнечном освещении в космосе). Отраженный поток солнечного излучения от поверхности КА и планеты не учитывается. Здесь также пренебрегаем тепловым потоком, теряемым за счет внешнего излучения в космическом пространстве, и лучистым теплообменом на внутренней поверхности цилиндрической оболочки пустотелого стержня.

Для решения задачи будем использовать метод конечных элементов (МКЭ). При этом стержень длиной a делится на КЭ поперечными сечениями $x = x_k$ с длинами $l_k = x_k - x_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, p$), начиная от шарнира ($k = 0, x = x_0$) до конца стержня ($k = p, x = x_p = x_0 + a$).

2. ТЕМПЕРАТУРА ОБОЛОЧКИ СТЕРЖНЯ ПРИ СОЛНЕЧНОМ НАГРЕВЕ

Согласно (1) тепловой поток при малых искривлениях стержня медленно изменяется в осевом направлении. Поэтому при определении температуры оболочки $T(x, \theta, t)$ ее изменением по длине стержня будем пренебрегать ($\partial^2 T / \partial x^2 \approx 0$) и будем считать ее постоянной в пределах толщины тонкой оболочки. Тогда уравнение нестационарной теплопроводности тонкой круговой оболочки постоянной толщины при солнечном нагреве без учета внешнего и внутреннего излучения будет:

$$c\rho h \frac{\partial T}{\partial t} = h\lambda \frac{\partial^2 T}{r^2 \partial \theta^2} + q^*, \quad (2)$$

где h – толщина оболочки; r – радиус оболочки; ρ , c , λ – плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала оболочки.

Решение уравнения (2) представим в виде ряда

$$T(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x, t) \cos n\theta. \quad (3)$$

На изгиб и изгибные колебания стержня в плоскости xu оказывает влияние только гармоника $n = 1$ температуры, т.е. $T_1(x, t)$. Для нее уравнение (2) с учетом (1) принимает вид

$$c\rho h \dot{T}_1 + \frac{h\lambda}{r^2} T_1 = \frac{1}{2} v A_s S_0 \frac{L_0^2}{L^2} \cos(\gamma - \varphi - \vartheta). \quad (4)$$

При использовании конечно-элементной модели стержня это уравнение записывается для всех дискретных поперечных сечений $x = x_k$, разделяющих КЭ:

$$c\rho h \dot{T}_{1,k} + \frac{h\lambda}{r^2} T_{1,k} = \frac{1}{2} v_k A_s S_0 \frac{L_0^2}{L^2} \cos(\gamma - \varphi - \vartheta_k), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, p) \quad (5)$$

где $v_k = v(x_k, t)$, $\vartheta_k = \vartheta(x_k, t)$.

Будем считать, что в пределах длины k -го КЭ при $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ температура изменяется по линейному закону

$$T_1(x, t) = T_{1,k-1} \left(1 - \frac{\xi}{l_k}\right) + T_{1,k} \frac{\xi}{l_k}; \quad \xi = x - x_{k-1}. \quad (6)$$

3. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ, СОЕДИНЕННОГО С КА

В КЭ-модели стержня в качестве обобщенных координат будем рассматривать поперечные перемещения $v_k(t) = v(x_k, t)$ и углы поворота $\vartheta_k(t) = \vartheta(x_k, t)$ в узлах, обусловленные его изгибом; $k = 0, 1, 2, \dots, p$. При шарнирном соединении стержня с КА следует считать $v_0 = 0$. Погонную массу

$m = 2\pi r h$ и погонный массовый момент инерции $i = \pi r^3 h$ будем заменять сосредоточенными в узлах массами μ_k , моментами инерции i_k и статическими моментами s_k .

Кинетическая энергия вращающегося с угловой скоростью $\dot{\phi}$ относительно центра масс системы с шарнирно присоединенным стержнем, совершающим малые поперечные колебания, записывается в виде ($v_0 = 0$)

$$K = \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 + \sum_{k=0}^p [(\mu_k x_k + s_k) \dot{\phi} \dot{v}_k + (s_k x_k + i_k) \dot{\phi} \dot{\vartheta}_k + \frac{1}{2} (\mu_k \dot{v}_k^2 + 2s_k \dot{v}_k \dot{\vartheta}_k + i_k \dot{\vartheta}_k^2)]. \quad (7)$$

Здесь J – момент инерции КА с присоединенным недеформируемым стержнем относительно их центра масс; для однородного стержня с КЭ одинаковой длины $l_k = l$

$$\mu_k = ml, \quad s_k = 0, \quad i_k = il + \frac{ml^3}{12} \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, p-1;$$

$$\mu_0 = \frac{ml}{2}, \quad s_0 = \frac{ml^2}{8}, \quad i_0 = \frac{1}{2} (il + \frac{ml^3}{12});$$

$$\mu_p = \frac{ml}{2} + \mu_r, \quad s_p = -\frac{ml^2}{8} + s_r, \quad i_p = \frac{1}{2} (il + \frac{ml^3}{12}) + i_r;$$

μ_r, s_r, i_r – масса, статический момент и момент инерции груза, присоединенного на конце стержня при $x = x_p$.

Потенциальная энергия поворота в упругом шарнире и термоупругого изгиба стержня

$$II = \frac{1}{2} c_0 \vartheta_0^2 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+a} EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\alpha}{r} T_1 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx, \quad (8)$$

где c_0 – жесткость упругого шарнира по углу поворота ϑ_0 ; EI – изгибная жесткость тонкостенного стержня с моментом инерции поперечного сечения $I = \pi r^3 h$; α – коэффициент температурного расширения материала стержня.

В пределах длины k -го КЭ стержня при $0 \leq \xi \leq l_k$ используем линейную аппроксимацию температуры (6) и квазистатическую аппроксимацию поперечного перемещения

$$\begin{aligned} v &= v_{k-1} \eta_1(\xi) + \vartheta_{k-1} \psi_1(\xi) + v_k \eta_2(\xi) + \vartheta_k \psi_2(\xi); \\ \eta_1(\xi) &= 1 - 3 \frac{\xi^2}{l_k^2} + 2 \frac{\xi^3}{l_k^3}, \quad \psi_1(\xi) = \xi - 2 \frac{\xi^2}{l_k} + \frac{\xi^3}{l_k^2}, \\ \eta_2(\xi) &= 3 \frac{\xi^2}{l_k^2} - 2 \frac{\xi^3}{l_k^3}, \quad \psi_2(\xi) = -\frac{\xi^2}{l_k} + \frac{\xi^3}{l_k^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

В результате для КЭ-модели стержня выражение (8) с учетом (6) и (9) записывается в виде ($v_0 = 0$)

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{1}{2} c_0 \vartheta_0^2 + \sum_{k=1}^p \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{12EI}{l_k^3} [(\upsilon_k - \upsilon_{k-1} - l_k \vartheta_{k-1})^2 - \right. \\
& - l_k (\upsilon_k - \upsilon_{k-1} - l_k \vartheta_{k-1})(\vartheta_k - \vartheta_{k-1}) + \left. \frac{1}{3} l_k^2 (\vartheta_k - \vartheta_{k-1})^2 \right\} + \\
& + EI \frac{\alpha}{r} [T_{1,k-1} (\frac{\upsilon_k - \upsilon_{k-1}}{l_k} - \vartheta_{k-1}) - T_{1,k} (\frac{\upsilon_k - \upsilon_{k-1}}{l_k} - \vartheta_k)].
\end{aligned} \quad (10)$$

Вариация работы управляющего момента $M_0(t)$ и демпфирующего момента $F_0(\dot{\vartheta}_0, \vartheta_0)$ в шарнире

$$\delta A = M_0 \delta \varphi - F_0 \delta \vartheta_0. \quad (11)$$

При этом обобщенными координатами являются $\varphi, \vartheta_0, \upsilon_1, \vartheta_1, \dots, \upsilon_p, \vartheta_p$. Для них уравнения движения составляются как уравнения Лагранжа с учетом (7), (11), (12). Они имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
J\ddot{\varphi} + \sum_{k=0}^p [(\mu_k x_k + s_k)\ddot{\upsilon}_k + (s_k x_k + i_k)\ddot{\vartheta}_k] &= M_0(t), \\
(s_0 x_0 + i_0)\ddot{\varphi} + i_0 \ddot{\vartheta}_0 + F_0(\dot{\vartheta}_0, \vartheta_0) + (c_0 + 4\frac{EI}{l_1})\vartheta_0 - 6\frac{EI}{l_1^2} \upsilon_1 + 2\frac{EI}{l_1} \vartheta_1 - \\
- \frac{\alpha EI}{r} T_{1,0} &= 0, \\
(\mu_k x_k + s_k)\ddot{\varphi} + \mu_k \ddot{\upsilon}_k + s_k \ddot{\vartheta}_k + 6EI[-\frac{2}{l_k^3} \upsilon_{k-1} + (\frac{2}{l_k^3} + \frac{2}{l_{k+1}^3})\upsilon_k - \frac{2}{l_{k+1}^3} \upsilon_{k+1} - \\
- \frac{1}{l_k^2} \vartheta_{k-1} - (\frac{1}{l_k^2} - \frac{1}{l_{k+1}^2})\vartheta_k + \frac{1}{l_{k+1}^2} \vartheta_{k+1}] + EI \frac{\alpha}{r} [\frac{1}{l_k} T_{1,k-1} - \\
- (\frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}})T_{1,k} + \frac{1}{l_{k+1}} T_{1,k+1}] &= 0, \\
(s_k x_k + i_k)\ddot{\varphi} + s_k \ddot{\upsilon}_k + i_k \ddot{\vartheta}_k + 6EI[\frac{1}{l_k^2} \upsilon_{k-1} - (\frac{1}{l_k^2} - \frac{1}{l_{k+1}^2})\upsilon_k - \frac{1}{l_{k+1}^2} \upsilon_{k+1} + \\
+ \frac{1}{3l_k} \vartheta_{k-1} + (\frac{2}{3l_k} + \frac{2}{3l_{k+1}})\vartheta_k + \frac{1}{3l_{k+1}} \vartheta_{k+1}] + \delta_{kp} \frac{\alpha EI}{r} T_{1,p} &= 0, \\
&(k = 1, 2, \dots, p)
\end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\upsilon_{p+1} = \vartheta_{p+1} = T_{1,p+1} = 0$; $\delta_{kp} = 1$ при $k = p$ и $\delta_{kp} = 0$ при $k \neq p$.

К этим уравнениям добавляются уравнения нестационарной теплопроводности стержня (5) для температур $T_{1,0}, T_{1,1}, T_{1,2}, \dots, T_{1,p}$ в расчетных сечениях стержня $k = 0, 1, 2, \dots, p$. В результате получается связанная система дифференциальных уравнений, описывающих поворот КА, термоупругие колебания стержня и его нестационарную теплопроводность с учетом влияния на углы падения солнечных лучей и, соответственно, на солнечный нагрев угла поворота КА и изгиба стержня.

Эти уравнения интегрируются численно при заданных начальных условиях для всех переменных.

4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

В качестве примера рассмотрим КА с упруго присоединенным к нему стержнем с грузом на конце, рис. 1. Примем следующие параметры КА, стержня и груза: масса и собственный момент инерции КА равны $m_0 = 1200$ кг, $J_0 = 200$ кг·м²; тонкостенный стержень из стали – $\rho = 7800$ кг/м³, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $a = 30$ м, $r = 0,025$ м, $h = 0,0001$ м, $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5}$ 1/К, $c = 462$ Дж/кгК, $\lambda = 50$ Вт/м, $A_s = 0,5$, $L_0/L = 1$; груз – $\mu_r = 10$ кг, $i_r = 7,5$ кг·м², $s_r = 0$. Коэффициенты жесткости и демпфирования упруго-вязкого шарнира: $c_0 = 100$ Н·м, $d_0 = 0$.

4.1. Реакция стержня на внезапное действие солнечных лучей после выхода из тени.

На рис.3-5 приведены зависимости $\varphi(t)$, $v_p(t)$ и $\vartheta_p(t)$ при выходе КА из тени при $t = 0$, $M_0(t) = 0$ для различных углов γ падения солнечных лучей на стержень.

На рис.6 для этих случаев показано распределение температуры $T_1(x,t)$ по длине стержня в момент времени $t = 180$ с, при котором температуры вышли на стационарный режим.

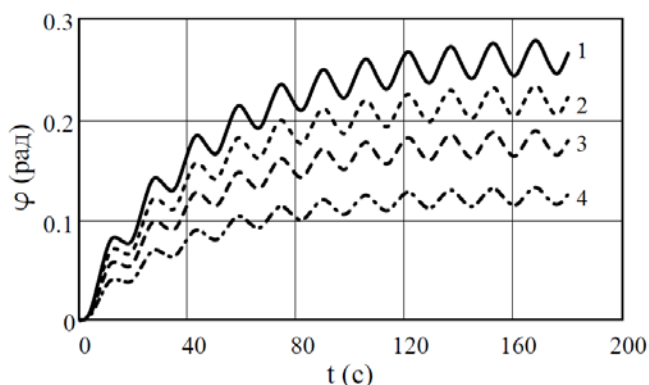


Рис.3. Зависимость φ от t : 1 – $\gamma = 0^\circ$; 2 – $\gamma = -30^\circ$; 3 – $\gamma = -45^\circ$; 4 – $\gamma = -60^\circ$.

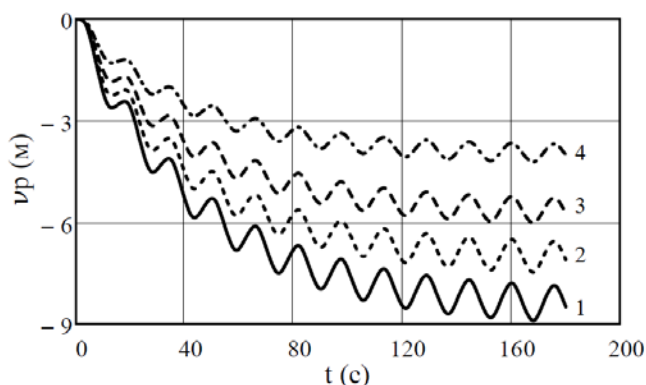


Рис.4. Зависимость v_p от t : 1 – $\gamma = 0^\circ$; 2 – $\gamma = -30^\circ$; 3 – $\gamma = -45^\circ$; 4 – $\gamma = -60^\circ$.

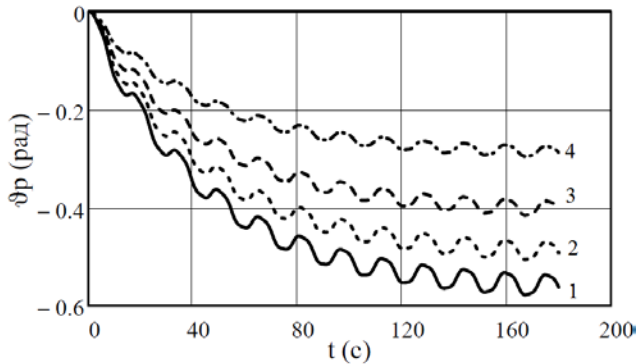


Рис.5. Зависимость ϑ_p от t : 1 – $\gamma = 0$; 2 – $\gamma = -30^\circ$; 3 – $\gamma = -45^\circ$; 4 – $\gamma = -60^\circ$.

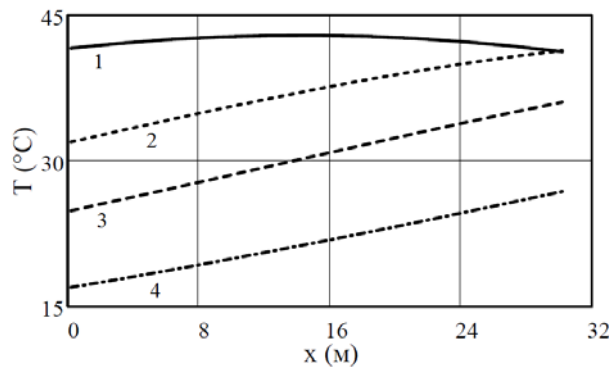


Рис.6. Распределение температуры по длине стержня при $t = 180$ с: 1 – $\gamma = 0$; 2 – $\gamma = -30^\circ$; 3 – $\gamma = -45^\circ$; 4 – $\gamma = -60^\circ$.

4.2. Реакция КА со стержнем при действии управляющего момента $M_0(t)$.

К КА приложен управляющий момент в виде импульса

$$M_0(t) = \begin{cases} \bar{M}_0 & \text{при } 0 \leq t < T/2, \\ -\bar{M}_0 & \text{при } T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

с целью его поворота в поле солнечных лучей на угол φ_k за время T из состояния покоя $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, $v(x,0) = \dot{v}(x,0) = 0$ при $\gamma = \pi/2$ в состояние $\varphi(T) = \varphi_k$, $\dot{\varphi}(T) = 0$ с устранением при $t \geq T$ колебаний по низшей собственной форме с частотой $\omega_1 = 0,4 \text{ с}^{-1}$ свободной системы (с незакрепленным КА). При этом согласно [6] должны выполняться условия $\bar{M}_0 = 4J\varphi_k/T^2$, $T = \chi \cdot 2\pi/\omega_1$, $\chi = 2,4,6,\dots$ Принимаем $\chi = 20$; при этом получаем $T = 312,7 \text{ с}$, $\bar{M}_0 = 1,357 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

На рис.7-9 приведены зависимости $\varphi(t)$, $v_p(t)$ и $\vartheta_p(t)$ с учетом солнечного нагрева (1) и без его учета (2).

На рис.10 показано изменение температуры на конце стержня $T_{1,p}(t)$.

На рис.11 представлен график распределения температуры $T_1(x,T)$ по длине стержня в момент окончания действия управляющего импульса.

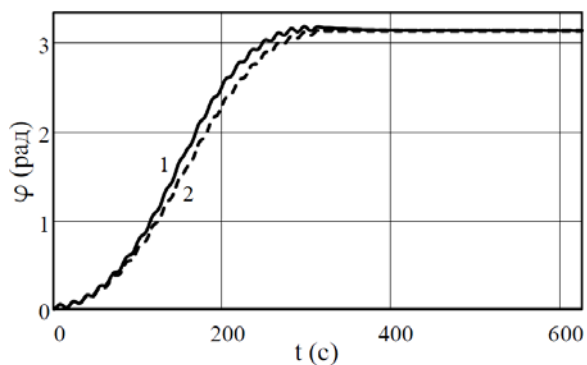


Рис.7. Зависимость φ от t : 1 – с учетом солнечного нагрева; 2 – без учета солнечного нагрева.

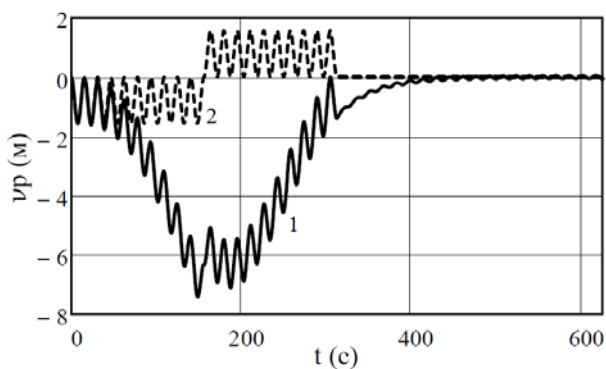


Рис.8. Зависимость v_p от t (обозначения 1 и 2 см. рис.7).

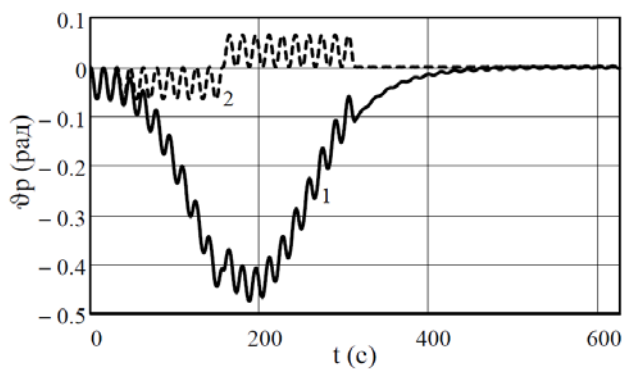


Рис.9. Зависимость φ_p от t (обозначения 1 и 2 см. рис.7).

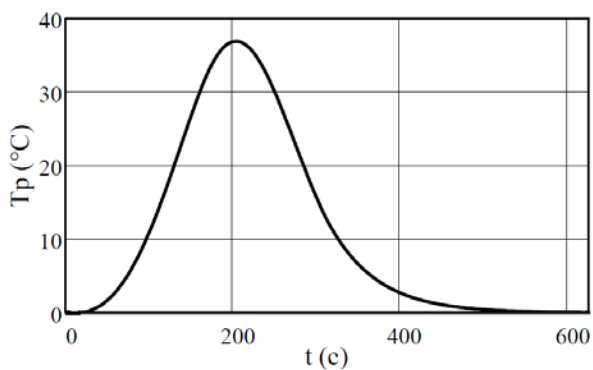


Рис.10. Зависимость $T_{1,p}$ от t .

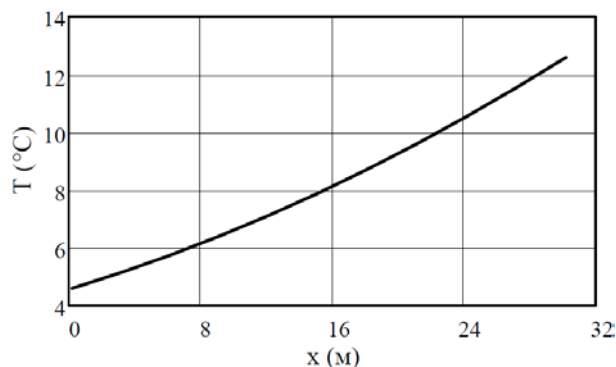


Рис.11. Распределение температуры по длине стержня при $t = T = 312,7$ с:

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Получено решение нестационарной задачи динамики КА с присоединенным к нему упругим тонкостенным стержнем, подвергающемуся действию солнечных лучей с учетом изменения угла падения лучей за счет поворота КА и термоупругих колебаний стержня.

2. Выполнены расчеты свободных колебаний системы при выходе КА из тени при действии различных направлениях солнечных лучей.

3. Выполнены расчеты колебаний системы при повороте из состояния покоя на заданный конечный угол в поле солнечных лучей под действием управляющего момента с устранением колебаний по низшей собственной форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Connel G.M., Chobotov V.* Possible effects of boom flutter on the attitude dynamics of the OV1-10 satellite // *J. Spacecraft and Rockets.* – 1969. – Vol.6. – N1. – P.90-92.
2. *Yu Y.-Y.* Thermally induced vibration and flutter of a flexible boom // *J. Spacecraft and Rockets.* – 1969. – Vol.6. – N8. – P.902-910.
3. *Graham J.D.* Solar induced bending vibrations of a flexible member // *AIAA J.* – 1970. – Vol.8. – N11. – P.2031-2036.
4. *Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н.* Связанная задача термоупругого изгиба и теплопроводности тонкостенного круглого стержня при солнечном нагреве // *МТТ.* – 2000. – №6. – С.161-166.
5. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / Под ред. *Авдеевского В.С.* – М.: Машиностроение, 1992. – 519 с.
6. *Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н.* Динамика упругих управляемых конструкций. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 328 с.

Поступила в редакцию 28 июля 2015 года.

Сведения об авторах:

Гришанина Татьяна Витальевна – д.ф.-м.н., проф., кафедра «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций», ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт, г. Москва, Россия; e-mail: grishaninatat@list.ru

Русских Сергей Владимирович – к.ф.-м.н., кафедра «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций», ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт, г. Москва, Россия; e-mail: sergey.russkih@rambler.ru

Шклярчук Федор Николаевич – д.т.н., гл.н.с., ФГБНУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: shklyarchuk@list.ru