О ТЕОРИИ МАСШТАБО-ЗАВИСИМЫХ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН[1]

Лурье С.А., Попова Е.И.[*], Лыкосова Е.Д.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия
[*] ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

Рассматривается теория маштабо-зависимых стержней и пластин, полученная на основе градиентной теории упругости. Показано, что использование прямой процедуры метода гипотез приводит к некорректной теории, в соответствии с которой эффективная жесткость тонких систем модифицируется за счет масштабного градиентного параметра. Установлено, что причиной некорректности является нарушение краевых условиях для моментных напряжений на продольных поверхностях стержней (пластин), то есть в нарушении уравнений равновесия. Предложен способ построения корректной теории, основанный на редукции потенциальной энергии градиентной теории, записанной с учетом кинематических гипотез теории стержней (пластин). Приводятся корректные уравнения теории стержней Бернулли, учитывающие масштабные эффекты в объеме и масштабные эффекты, связанные с поверхностными взаимодействиями. В качестве примера оценки влияния масштабных параметров на жесткости тонких систем, исследованы зависимости первой собственной частоты от объемных (градиентных) и поверхностных масштабных параметров.

Ключевые слова: масштабозависимые стержни и пластины; градиентные теории упругости; метод гипотез; кинематические соотношения; вариационный метод; адгезионные взаимодействия; уточненная теория

ON THEORY OF SCALE DEPENDENT BEAMS AND PLATES

Lurie S.A., Popova E.I.[*], Lykosova E.D.

Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
[*]Moscow Aviation Institute (National Research Institute), Moscow, Russia

SUMMARY

The theory of scale dependent beams and plates, is obtained on the basis of the gradient theory of elasticity. It is shown that the use of the direct procedure for the method of hypothesis leads to an incorrect theory according to which the effective stiffness of thin systems modified by the scale of the gradient parameter. It was found that the cause of impropriety is in violation of the boundary conditions for the moment of stress on the longitudinal surface of the beams (plate). A method of constructing a correct theory, based on the reduction of potential energy for the gradient theory and on kinematic Bernoulli hypotheses theory of beams (plates) is proposed. We give the correct equations of the theory of Bernoulli beams, considering scale effects in the volume and scale effects due to surface interactions. As an example, we found the dependences of the natural frequencies for the thin beams on the scale parameter of the body and surface scale parameter.

---

[1] *Работа выполнена при поддержке Гранта РФФИ 15-01-03649.*

Key words: scale-dependent beams and plates; gradient elasticity; method of hypothesis; kinematic equations; variation method; adhesion interactions; refined theory

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются сверхтонкие стержни и пластины, практический интерес к которым связан с многочисленными приложениями в области микроэлектноники, микроскопии, с перспективами развития высокочувствительных датчиков и сенсорных устройств, с новейшими исследованиеми биологических систем[1-4]. С другой стороны, интерес к таким системам возник в связи с серией недавних экспериментальных исследований сверхтонких систем [5-7], показавших систематическое значительное повышение жесткости таких тонких стержней, пластин, как только их толщина становится достаточно малой [1-4]. Обнаруженный в экспериментах масштабный эффект стал причиной развития теоретических исследований, направленных на объяснение подобных эффектов, их моделирование. В первую очередь для этой цели стали привлекаться прикладные градиентные теории упругости [1-4]. Это объясняется тем, что градиентные теории упругости учитывают расширенный спектр кинематических соотношений и (учитываются не только деформации, но и их производные) и построены на основе определяющих соотношений с модулями упругости, отличающимися по размерности на квадрат длины. Градиентные теории являются по построению многомасштабными, включают дополнительные параметры размерности длины и подходят для моделирования масштабных эффектов.

Отметим, что, как правило, градиентные терии упругости применяются для моделирования механических свойств неоднородных материалов с развитой внутренней структурой, в которых учет масштабных (градиентных эффектов) и адгезионных свойств межфазных границ может оказаться весьма существенным или даже определяющим. В случае сверхтонких систем использование градиентных теорий оправдывается в многочисленных работах тем, что в таких структурах толщина исследуемых элементов может становиться соизмеримой с характерными размерами микроструктуры материала. В результате, в недавних исследованиях [1-4], строятся приближенные модели деформирования тонких структур, позволяющие сделать вывод о зависимости физических параметров от характерного размера микроструктуры материала. Качествено, полученные так результаты вполне соотвествуют экспериментально наблюдаемым масштабным эффектам.

Тем не менее, проблема оказывается совсем нетривиальной. Для получения прикладных теорий сверхтонких стержней используют градиентнуую теорию упругости и метод гипотез. Покажем, что такой подход вроде бы сразу дает поправки в изгибнуую жесткость, что в результате и трактуется как масштабный эффект. Рассмотрим вариационную формулировку градиентной модели Миндлина полностью определяемую Лагранжианом

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint [C_{ijmn} u_{i,j} u_{m,n} + C_{ijkmnl} u_{i,jk} u_{m,nl}] dV \qquad (1)$$

Здесь A – работа внешних сил, распределенных в объеме и не поверхности, u_i – компоненты вектора перемещений, $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$, x_j – евклидовы координаты, C_{ijmn} – тензор классических модулей упругости $C_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})$.

Напряжения находятся с помощью формул Грина $\sigma_{ij} = C_{ijmn} R_{m,n} = \lambda \delta_{ij} R_{m,m} + \mu (R_{i,j} + R_{j,i})$.

Рассмотрим для конкретности однопараметрическую градиентную теорию, введенную в работах [8-11]. Для нее тензор градиентных модулей имеет вид

$$C_{ijkmnl} = C_{rkij} C_{rlmn} / C$$

где величина C связана с масштабным (размерным) масштабного параметром, $(1/C) = l^2$. Такая структура градиентного тензора упругости C_{jkmnli} автоматически обеспечивает обратимость процесса деформирования (сохранение энергии), положительную определенность канонической квадратичной формы плотности потенциальной энергии кривизн.

Построим модель тонких пластин, формально вводя кинематические гипотезы Кирхгоффа

$$U(x,y,z) = -W_{,x}(x,y)z, \quad V(x,y,z) = -W_{,y}(x,y)z, \quad W(x,y,z) = W(x,y) \quad (2)$$

Здесь $x, y, \quad x \equiv x_1, \quad y \equiv x_2$ – координаты в нейтральной поверхности пластины, $z, \quad z \equiv x_3$ – поперечная координата в направлении толщины пластины, $u_1(x,y,z) = U(x,y,z), \quad u_2(x,y,z) = V(x,y,z),$ компоненты перемещений в направлении координат x и y соответственно, $u_3(x,y,z) = \mathrm{W}(x,y,z)$, $\mathrm{W}(x,y,z)$ – компонента поперечных смещений пластины. Учитывая (2), найдем

$$\begin{gathered} u_i = -W_{,k} \delta^*_{ki} + WZ_i, \quad \theta = -\nabla^2 Wz, \quad \varepsilon_{ij} = -W_{,ab}(\delta^*_{ai}\delta^*_{bj} + \delta^*_{aj}\delta^*_{bi})z/2 \\ \varepsilon_{ij}\delta_{ij} = -W_{,ab}(\delta^*_{ab} + \delta^*_{ab})z/2 = \theta \end{gathered} \quad (3)$$

Перепишем Лагранжиан с учетом кинематических гипотез Кирхгоффа (2),(3)

$$\begin{aligned} L &= A - \frac{1}{2}\iiint [\lambda u_{i,i} u_{j,j} + \mu u_{i,j}(\mathrm{u}_{i,j} + u_{j,i}) + \\ &+ [(2\mu+\lambda)u_{i,ir} + \mu(\Delta u_r - u_{i,ir})][(2\mu+\lambda)u_{j,jr} + \mu(\Delta u_r - u_{j,jr})]/C]dV = \\ &= A - \frac{1}{2}\iiint [\lambda zz \nabla^2 W \nabla^2 W + 2\mu zz W_{,ij} W_{,ij} + \\ &+ [(2\mu+\lambda)u_{i,ia} + \mu(\Delta u_a - u_{i,ia})]\delta_{ab}[(2\mu+\lambda)u_{j,jb} + \mu(\Delta u_b - u_{j,jb})]/C]dV = \\ &= A - \frac{1}{2}\iiint \{\lambda zz \nabla^2 W \nabla^2 W + 2\mu zz W_{,ij} W_{,ij} + \\ &+ [(2\mu+\lambda)(2\mu+\lambda) zz \nabla^2 W_{,a} \nabla^2 W_{,b} \delta^*_{ab}]/C + \lambda\lambda \nabla^2 W \nabla^2 W / C\} dV \end{aligned} \quad (4)$$

Даже не проводя интегрировавние в отношении поперечной координаты, т.е. по толщине пластинки h в соотношении (3), видно, что формальная процедура получения модели деформирования пластины дает поправки в цилиндрическую жесткость (последнее слагаемое в правой части уравнения (3). Поправка пропорциональна квадрату масштабного параметра, $(1/C) = l^2$ деленного на квадрат толщины пластинки. Отсюда видно, что учет только кинематических гипотез приводит к существенным поправкам в классическую цилиндрическую жесткость. Именно такой результат и был получен фактически во всех работах, посвященных рассматриваемой проблеме. Тем не менее, этот результат нельзя считать правильным. В недавней работе [12] показано, что более корректные рассуждения приводят к принципиально иному результату, когда учет градиентных эффектов не меняет классической изгибной жесткости, а масштабный параметр входит множителем только при неклассическом слагаемом в уравнениии изгиба при шестой производной от прогиба. Таким образом, метод гипотез, используемый для получения моделей деформирования сверхтонких стержней (пластин) может приводить к значительным погрешностям. Это можно связывать с тем, что кинематические гипотезы о линейном распределении перемещений по толщине вступают в противоречие с усложненной кинематикой градиентных теорий упругости. В данной работе мы покажем ошибочность приведенного выше подхода прямого получения уравнений изгиба стержней (пластин) методом гипотез.

Наконец отметим, что наряду с учетом влияния градиентных параметров на механические свойства стержней и пластин учет влияния адгезионных параметров для очень тонких структур может быть существенным и также может удовлетворительно описывать масштабные эффекты. Вариационная постановка градиентной теории адгезионного взаимодействия приводится например в статьях [13,14]. В данной работе мы представим корректные уравнения изгиба пластин, полученные вариационным путем на основе метода редукции потенциальной энергии. Записываются также уравнения теории изгиба стержней с учетом эффектов адгезии. Показывается, что адгезионные свойства поверхностей могут оказывать значительное влияние на деформирование тонких платсин (стержней) при уменьшении тощины, в то время как же градиентные эффектов в достаточно широком диапазоне толщин дают гораздо меньший вклад, чем это было указано ранее в ряде опубликованных исследований других авторов.

1. МЕТОД РЕДУКЦИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассмотрим для простоты проблему изгиба стержней Бернулли. Путь имеется изотропный стержень прямоугольного сечения длинной L, толщиной h и шириной b, $h \ll L$, $b \gg h$.

Приведем доказательство того, что использование прямого использования метода гипотез в рамках вариационных подходов является не вполне корректным. Для стержней имеют место следующие кинематические гипотезы

$$u_1 = u(x) - zw'(x),\ \ u_2 = 0,\ \ u_3 = w(x) \tag{5}$$

Далее вычислим дисторсии $u_{i,j}$ и определим ненулевые компоненты кривизн $u_{i,jk}$

$$u_{1,1} = u' - zw'',\ \ u_{1,3} = -w',\ \ u_{3,1} = w' \tag{6}$$

$$u_{1,11} = u'' - zw''',\ \ u_{1,13} = -w'',\ \ u_{1,31} = -w'',\ \ u_{3,11} = w'' \tag{7}$$

Воспользуемся предварительным качественным анализом проблемы, по аналогии с тем как поступил Л.Ландау при построении теории пластин. Рассмотрим вариационную постановку градиентной упругости общего вида [15] и запишем вариацию потенциальной энергии в следующем виде

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_\Omega \left(\tau_{ij}\delta u_{i,j} + \mu_{ijk}\delta u_{i,jk}\right)dV \\ &= \int_\Omega \left[\tau_{11}\delta u_{1,1} + \mu_{111}\delta u_{1,11} + \mu_{113}\delta u_{1,13} + \mu_{131}\delta u_{1,31} + \mu_{311}\delta u_{3,11}\right]dV\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь τ_{ij} и μ_{ijk} – напряжения Коши и моментные напряжения, для которых в соответствии с формулами Грина имеют место следующие определяющие соотношения

$$\tau_{ij} = \partial U / \partial u_{i,j} = C_{ijmn}u_{m,n}, \qquad \mu_{ijk} = \partial U / \partial u_{i,jk} = C_{ijkmnl}u_{m,nl}$$

Отметим, что мы полагаем, что рассматриваемые градиентные теории упругости удовлетворяют недавно установленным критериям корректности [15], в соответствии с которыми тензор моментных напряжений должен быть симметричным по последним двум индексам: $\mu_{ijk}=\mu_{ikj}$. Если градиентная теория является градиентной теорией деформаций (не дисторсий), то должна иметь место симметрия и по первой паре индексов $\mu_{ijk}=\mu_{jik}$, и $\mu_{131}=\mu_{311}$. Рассмотрим отдельно неклассическое граничное условие на поверхности стержня, которое для градиентной теории записывается в виде [15]

$$\mu_{ijk}n_k=0 \tag{9}$$

Очевидно, что для рассматриваемого случая граничное условие (9) ведет к условию (свертка с нормалью поверхности стержня *z=constant*): $\mu_{ij3}=0$. Полагаем, что для тонких стержней эти же компоненты моментных напряжений должны быть равны нулю и везде по всей толщине стержня. Следовательно, имея в виду, что, в соответствии с кинематикой Бернулли (7), $u_{1,31}=-u_{3,11}$, получим вместо (8)

$$\delta U=\int_\Omega\left[\tau_{11}\delta u_{1,1}+\mu_{111}\delta u_{1,11}\right]dV \tag{10}$$

2. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МАСШТАБОЗАВИСИМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Для изотропной градиентной упругости, моментные напряжения, записанные в терминах в терминах дисторсии $u_{i,jk}$ имеют вид [12,15]

$$\begin{aligned}\mu_{ijk}=C_1\Big[&\left(\Delta u_i+2\theta_{,i}\right)\delta_{jk}+\left(\Delta u_j+2\theta_{,j}\right)\delta_{ki}+\left(\Delta u_k+2\theta_{,k}\right)\delta_{ij}\Big]+\\&+2C_8\left(u_{i,jk}+u_{j,ki}+u_{k,ij}\right)\end{aligned} \tag{11}$$

Учтем, что для теории стержней $u_{2,ij}=u_{i,2j}=u_{i,j2}=0$. Тогда имеем из (11)

$$\begin{aligned}\mu_{111}&=3C_1\left(\Delta u_1+2\theta_{,1}\right)+6C_8u_{1,11}=3C_1\left(u_{1,11}+u_{1,33}+2u_{1,11}+2u_{3,31}\right)+6C_8u_{1,11}\\&=3C_1\left(3u_{1,11}+u_{1,33}+2u_{3,13}\right)+6C_8u_{1,11}=\left(9C_1+6C_8\right)u_{1,11}+\\&+\underline{3C_1\left(u_{1,33}+2u_{3,13}\right)}\\ \mu_{133}&=C_1\left(\Delta u_1+2\theta_{,1}\right)+2C_8\left(u_{1,33}+u_{3,31}+u_{3,13}\right)\\&=C_1\left(u_{1,11}+u_{1,33}+2u_{1,11}+2u_{3,31}\right)+2C_8\left(u_{1,33}+2u_{3,13}\right)\\&=C_1\left(3u_{1,11}+u_{1,33}+2u_{3,13}\right)+2C_8\left(u_{1,33}+2u_{3,13}\right)=3C_1u_{1,11}+\\&+\underline{\left(C_1+2C_8\right)\left(u_{1,33}+2u_{3,13}\right)}\end{aligned} \tag{12}$$

Заметим, что для тонких стержней (пластин) имеет место (9) и следует принять $\mu_{133}=0$. В результате, учитывая, что из второго равенства (12) можно исключить подчеркнутое выражение, из первого уравнения (12) получим

$$\mu_{111}=\left(9C_1+6C_8\right)u_{1,11}-\frac{9C_1}{C_1+2C_8}u_{1,11}=\frac{12C_8\left(2C_1+C_8\right)}{C_1+2C_8}u_{1,11} \tag{13}$$

В частности если в (13) принять, что $C_1=C_8$, то $\mu_{111}=12C_1u_{1,11}$.

Используя принцип Лагранжа $\delta L = 0$, (1) и учитывая (10), получим после интегрирования по частям следующие уравнения равновесия в усилиях и моментах (уравнения Эйлера)

$$\begin{cases} N' - Q'' = 0 \\ M'' - Z''' + p = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Здесь $p = p^{+} - p^{-}$, p^{+}, p^{-} – распределенные усилия, заданные на верхней и нижней поверхностях стержня.

Для однопараметрической градиентной упрощенной модели ($C_1 = C_8$) моменты и усилия, входящие в (14), имеют вид

$$N = b\int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2}\left(u' - zw''\right)dz = \frac{Ebu'}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{h/2} dz = \frac{EA}{1-\nu^2}u'$$

$$M = b\int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2}\left(u' - zw''\right)zdz = -\frac{bEw''}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -\frac{bh^3 E}{12\left(1-\nu^2\right)}w''$$

$$Q = 12C_1 b\int_{-h/2}^{h/2}\left(u'' - zw'''\right)dz = 12C_1 A u''$$

$$Z = b\int_{-h/2}^{h/2} 12C_1\left(u'' - zw'''\right)zdz = -12C_1 bw'''\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -C_1 bh^3 w'''$$

Подставляя найденные выражения для усилий и моментов в уравнения равновесия (14), найдем

$$\begin{cases} u'' - \hat{l}^2 u'''' = 0 \\ w'''' - \hat{l}^2 w'''''' = p / D \end{cases} \tag{15}$$

где $D = Eh^3 / [12\left(1-\nu^2\right)]$, $\hat{l} = \sqrt{12\left(1-\nu^2\right)C_1 / E}$.

В общем случае, для корректной двухпараметрической градиентной теории $C_1 \neq C_8$ получаем также уравнения равновесия (15) в которых масштабный параметр имеет вид

$$\hat{l} = \sqrt{[12C_8\left(2C_1 + C_8\right)\left(1-\nu^2\right)] / [\left(C_1 + 2C_8\right)E]} \tag{16}$$

Граничные условия для рассматриваемой неклассической теории масштабо-зависимых стержней получаются как естественные граничные условия и имеют вид

$$\left[\left(N - Q'\right)\delta u + Q\delta u' + \left(M' - Z''\right)\delta w - \left(M - Z'\right)\delta w' - Z\delta w''\right]\Big|_0^L = 0 \tag{17}$$

Уравнения (15)-(17) полностью описывают теорию масштабо зависимых стержней Бернулли (при $\nu = 0$). Нетрудно видеть, что в предложенном варианте теории классические жесткости, (при второй и четвертой производной соответсвенно в уравнениях (15)) не модифицируются за счет масштабных градиентных параметров.

Для того чтобы учесть адгезионные эффекты достаточно в выражение потенциальной энергии в (1),(8) добавить потенциальную энергию адгезионно активной поверхности

$$U = (1/2)\iiint_V [C_{ijmn}u_{i,j}u_{m,n} + C_{ijkmnl}u_{i,jk}u_{m,nl}]dV + \iint_F A_{ijmn}u_{i,j}u_{m,n}dF \tag{18}$$

Здесь $A_{ijmn} = \lambda^F \delta^*_{ij}\delta^*_{mn} + \mu^F(\delta^*_{im}\delta^*_{jn} + \delta^*_{in}\delta^*_{jm}) + \delta^F n_i n_m \delta^*_{jn}$ – тензор адгезионных модулей теории идеальной адгезии [9-11,13,14], $\delta^*_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$ – плоский тензор Кронекера на поверхности пластины как трехмерного тела, n_i – орт нормали к поверхности пластины как трехмерного тела. Адгезионные свойства поверхности стержня определяются через три физические постоянные λ^F, μ^F, δ^F [9-11,13,14].

Предполагается, что строится снова теория стержней Бернулли с кинематикой (5)-(7). Рассмотрим случай изгиба, который не сопровождается растяжением-сжатием. Использование метода редукции потенциальной энергии и вариационной процедуры получения уравнений прикладной теории стержней (пластин) на основе потенциальной энергии (18), в результате, приводит к следующему уравнению равновесия, записанного относительно прогиба стержня

$$D^* w^{(4)} - \hat{l}^2 D w^{(6)} - 2\delta^F w'' = p, \quad D^* = D + (2\mu^F + \lambda^F)h^2/2 \qquad (19)$$

Следовательно, учет масштабных параметров адгезии модифицирует классическую жесткость $D = Eh^3/12$ за счет эффектов поверхностного натяжения $(2\mu^F + \lambda^F)$ и изменяет структуру разрешающего уравнения за счет адгезионной "изгибной" жесткости поверхности δ^F .

3. ОБСУЖДЕНИЕ И ПРИМЕРЫ

Полученное уравнение в теории стержней Бернулли (19) определяет корректную теорию масштабнозависимых стержней Бернулли. Для этой теории характерно, то, что классическая изгибная жесткость $D = Eh^3/12$ не подвергается изменению за счет учета градиентных масштабных эффектов, а градиентный параметр $\hat{l}^2$ определяет оператор Гельмгольца в уравнении равновесия. Таким образом, полученная теория полностью соответствует обобщенной теореме Попковича-Нейбера об общей структуре решений градиентных теорий. Это отличает данную теорию от некорректных теорий (см. например [3]). При этом в рассматриваемой градиентной теории выполняются все статические граничные условия на верхней и нижней поверхностях стержней (пластин), включая неклассические условия для моментных напряжений. Именно эти граничные условия нарушаются при прямом использовании процедуры метода гипотез в рамках вариационных подходов, что и приводит в результате к ошибочным поправкам в цилиндрическую жёсткость. Отметим, что в данной работе корректная теория стержней Бернулли получена с помощью метода редукции потенциальной энергии. Однако можно убедиться, что этот же метод реализуем и для теории стержней Тимошенко. В этом случае учет условий корректности градиентных теорий [15] является весьма существенным.

Уравнения равновесия (19) учитывают дополнительно адгезионные эффекты и являются естественным обобщением уравнений (15) теории масштабо-зависимых стержней.

Приведем пример, показывающий, что учет адгезионных параметров, может существенно изменять жесткостные характеристики масштабо-зависимых стержней в диапазоне толщин, обычно рассматриваемых для такого рода структур [3]. Поэтому корректная теория, учитывающая одновременно масштабные градиентные и адгезионные параметры, вполне может описывать известные экспериментальные данные и поэтому является в этом смысле альтернативой известных некорректных теорий. В качестве примера исследуем собственные частоты масштабо зависимых стержней, которые характеризуют динамическую жесткость системы. Для этого запишем уравнение движения размерозависимых стержней при изгибе, учитывая только классические инерционные составляющие, связанные с прогибом

$$-\gamma l^2 w^{(6)} + D^* w^{(4)} - 2\delta^F w'' = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (20)$$

Здесь γ – амплитуда градиентного параметра, δ^F – «изгибный» адгезионный параметр, l – масштабный параметр, ρ – плотность, $\lambda^F + 2\mu^F$ – адгезионный параметр, отвечающий за поверхностное натяжение.

Нетрудно убедится, что в случае шарнирного опирания уравнение (20) дает следующее уравнение для определения собственных частот

$$\gamma l^2 (\lambda_k)^6 + D^* (\lambda_k)^4 + 2\delta^F (\lambda_k)^2 = \rho \omega_k^{\ 2}, \quad \lambda_k = k\pi / L \qquad (21)$$

Исследуем зависимость квадрата первой частоты ω_1^2 от масштабных параметров (рис.1). Для этого воспользуемся (21) и рассмотрим балку со следующими параметрами: $L = 5h$ – длина стержня, $h = l$ – толщина стержня, $l = 17,6 \cdot 10^{-6}\,м$ – масштабный параметр, $k = 1$ – число полуволн, $E = 1,44 \cdot 10^6\,Па$ – модуль упругости, $\nu = 0$ – коэффициент Пуассона.

На рис.1 представлены зависимостти частотного параметра для первой относительной собственной частоты $\Omega = \omega_1^{\ 2} / \omega_{classic}^{\ \ 2}$ от масштабных параметров в объеме и на поверхности, $\omega_{classic}^{\ \ 2}$ – квадрат первой собственной частоты классического стержня. Масштабный параметр в объеме (градиентный параметр) характеризуется величиной γ. Для учета масштабных параметров адгезионных взаимодействий полагаем, что адгезионные характеристики пропорциональны масштабному параметру: $\lambda^F + 2\mu^F = k_1 E l$, $\delta^F = k_2 E l$, где k_1 и k_2 – амплитудные коэффициенты. Полученные результаты по корректной модели сравниваются с результатами работы [3], отмеченными на рис.1 точками (Ω_{Ma}).

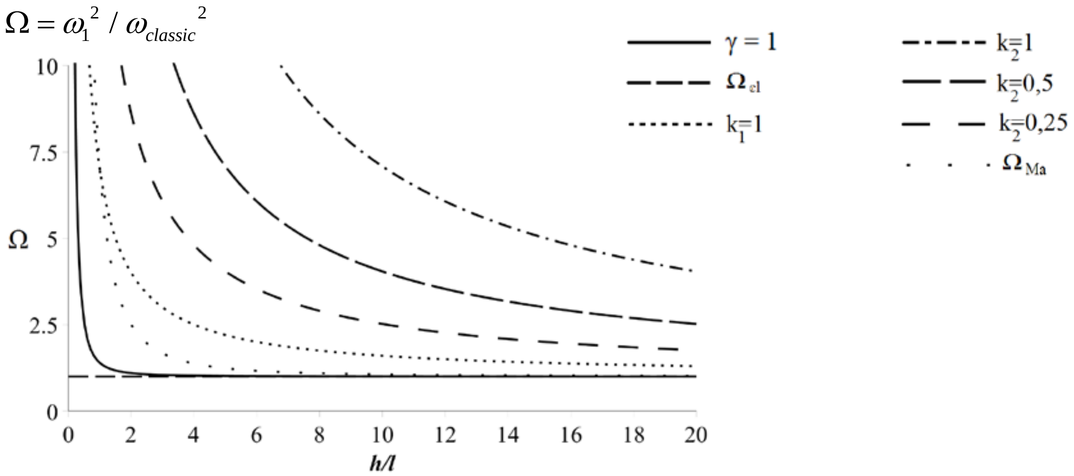

Рис.1. Сравнение собственных частот, найденных по теории [3] (Ω_{Ma}) с результатами корректной теории (21), полученных с учетом эффектов поверхностных эффектов общего вида.

Анализ зависимостей, представленных на рис.1, показывает, что влиянием градиентного параметра (сплошная линяя) можно пренебречь по сравнению с влиянием адгезионных параметров. Можно видеть, что параметр δ^F, который возникает в обобщенной теории адгезии, может оказывать наиболее существенное влияние на динамическую жесткость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена корректная теория масштабо зависимых стержней (пластин), учитывающая выполнение классических и неклассических граничных условий на поверхностях стержней (пластин), полученная с использование метода редукции потенциальной энергии деформации. Сформулирована теория масштабо-зависимых стержней Бернулли, и обобщенная теория стержней Бернулли, учитывающая адгезионный эффекты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yang F., Chong A.C.M., Lam D.C.C., Tong P.* Couple stress based strain gradient theory for elasticity // Int. J. of Solids and Structures. – 2002. – Vol.39. – P.2731-2743.
2. *Wang C.M., Zhang Y.Y., He X.Q.* Vibration of nonlocal Timoshenko beams // Nanotechnology. – 2007. – Vol.18. – 105401 (9 p.).
3. *Ma H.M., Gao X.-L., Reddy J.N.* A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory // J. of the Mechanics and Physics of Solids. – 2008. – N56. – P.3379-3391.
4. *Ma H.M., Gao X.-L., Reddy J.N.* A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory // Acta Mech. – 2011. – Vol.220. – N1. – P.217-235.
5. *Kakunai S., Masaki J., Kuroda R., Iwata K., Nagata R.* Measurement of apparent Young's modulus in the bending of cantilever beam by heterodyne holographic interferometry // Exp. Mech. – 1985. – Vol.25. – N4. – P.408-412.
6. *Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P.* Experiments and theory in strain gradient elasticity // J. Mech. Phys. Solids. – 2003. – Vol.51. – P.1477-1508.
7. *McFarland A.W., Colton J.S.* Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors // J. Micromech. Microeng. – 2005. – Vol.15. – N5. – P.1060-1067.
8. *Лурье С.А. Белов П.А.* Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с "двойникованием" / Всероссийская конференция "Современные проблемы механики гетерогенных сред". Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2005. – Т.I. – С.100-132.
9. *Lurie S.A., Volkov-Bogorodsky D.B., Zubov V.I., Tuchkova N.P.* Advanced theoretical and numerical multiscale modeling of cohesion/adhesion interactions in continuum mechanics and its applications for filled nanocomposites // Int. J. Comp. Mater. Sci. – 2009. – Vol.45. – N3. – P.709-714.
10. *Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P.* Gradient theory of media with conserved dislocations: application to microstruc-tured materials / In: One hundred years after the Cosserats. Series: advances in mechanics and mathematics. – Springer, 2010. – Vol.21. – P.223-234.

11. *Lurie S.A., Belov P.A.* Cohesion field: Barenblatt's hypothesis as formal corollary of theory of continuous media with conserved dislocations // Int. J. Fract. – 2008. – Vol.150 – N1. – P.181-194.
12. *Лурье С.А., Кузнецова Е.Л., Рабинский Л.Н., Попова Е.И.* Уточненная градиентная теория масштабо-зависимых (scale-depend) сверхтонких стержней // МТТ. – 2015. – №2. – С.30-43.
13. *Belov P.A., Lurie S.A.* Theory of ideal adhesion interactions // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т.13. – №4. – С.545-561.
14. *Лурье С.А., Тучкова Н.П.* Континуальная модель адгезии для деформируемых твердых тел и сред с наноструктурами // Композиты и наноструктуры. – 2009. – №2. – С.25-43.
15. *Gusev A.A., Lurie S.A.* Symmetry conditions in strain gradient elasticity // Mathematics and Mechanics of Solids Mathematics. – 2015. – DOI: 10.1177/ 1081286515606960.

Поступила в редакцию 3 августа 2015 года.

Сведения об авторах:

Лурье Сергей Альбертович – д.т.н., проф., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: salurie@mail.ru

Попова Екатерина Игоревна – асп., ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: concinentio@gmail.com

Лыкосова Елена Дмитриевна – н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: elykosova@mail.ru