

УДК 539.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗВИТИЯ РЕАКТИВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ОБРАТНОМ ПРЕВРАЩЕНИИ В СТЕРЖНЕ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ¹

Мовчан А.А., Кузнецова Н.С.*

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

**Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, г. Москва, Россия*

РЕЗЮМЕ

В рамках различных вариантов модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы (СПФ) при фазовых и (или) структурных превращениях получены аналитические решения задачи о генерации реактивных напряжений в стержне из СПФ при обратном термоупругом мартенситном превращении в жестко зафиксированном состоянии после предварительного прямого превращения под действием постоянного напряжения.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; реактивные напряжения; фазовые переходы; структурные превращения; пластичность; аналитическое решение

SIMULATION OF REACTIVE STRESS EVOLUTION DURING INVERSE PHASE TRANSITION IN BEAM FROM SHAPE MEMORY ALLOYS

Movchan A.A., Kuznetsova N.S.*

Institute of applied mechanics of Russian Academy of Science, Moscow, Russia

**Moscow state university, Moscow, Russia*

SUMMARY

In framework of different variants of model of non-linear deformation of shape memory alloys (SMA) at phase and (or) structure transformation the analytical solution is found for problem of reactive stress evolution in constrained beam from SMA during inverse thermo-elastic martensite phase transition after premature direct transformation under an action of constant stress.

Key words: shape memory alloys; reactive stress; phase transition; structure transformation; plasticity; analytical solution

ВВЕДЕНИЕ

Уникальные свойства сплавов с памятью формы (СПФ) связаны с тем обстоятельством, что эти материалы являются композитами, в которых объемная доля отдельных компонент (аустенитной, мартенситной, ромбоэдрической и т.д. фаз) меняются в процессе изменения температуры и (или) напряжений

¹ Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, проект № 14-01-00189

(термоупругие фазовые переходы [1]). Кроме того, свойства фаз (мартенситной, ромбоэдрической) с низкосимметричной кристаллической решеткой могут меняться при нагружении в процессе переориентации или раздвойникового (структурное превращение). В частности, оба эти явления могут наблюдаться при нагреве элементов из СПФ в заневоленном состоянии, после того, как этим элементам сообщена начальная фазово – структурная деформация.

Явление генерации реактивных напряжений при обратном термоупругом мартенситном фазовом превращении в полностью или частично заневоленных элементах из (СПФ) часто используется в различных приложениях данных материалов. Это явление достаточно подробно изучено экспериментально [4-10]. Исследована зависимость реактивных напряжений от величины предварительной деформации, сообщенной элементу из СПФ перед заневоливанием [4,6-8], от возрастающей температуры [4,5,10], от жесткости заневоливания [10], от деформации в процессе нагрева при упругом заневоливании [10]. Установлено, что в процессе обратного превращения реактивные напряжения монотонно растут с ростом температуры до определенного значения, коррелирующего с температурой окончания обратного превращения при действующих (реактивных) напряжениях. Максимальные значения реактивных напряжений возрастают с ростом значения предварительно заданной деформации до величины, коррелирующей с кристаллографической деформацией фазового превращения. Сами максимальные значения реактивных напряжений могут существенно превышать те напряжения, которые потребовалось приложить для создания в СПФ начальной деформации.

Что же касается теоретического моделирования соответствующего процесса, то здесь, чаще всего используются специальные гипотезы [8,9,11], принимаемые конкретно для описания данного явления и никак не интерпретируемые в терминах общих определяющих соотношений для СПФ. В частности, весьма популярным является предположение о том, что график зависимости максимальных реактивных напряжений от предварительно созданной неупругой деформации совпадает с диаграммой пластического деформирования СПФ в аустенитном фазовом состоянии при температуре вблизи температуры окончания обратного превращения [9]. Однако, экспериментальные данные [4,8] свидетельствуют о том, что график зависимости максимальных реактивных напряжений от предварительно заданной деформации расположен существенно ниже (ближе к оси деформаций), чем диаграмма пластического деформирования СПФ в аустенитном фазовом состоянии.

В данной работе моделирование процесса генерации реактивных напряжений в стержне из СПФ производится в рамках различных вариантов общей системы определяющих соотношений теории нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [12-17]. Никакие частные гипотезы конкретно для описания развития реактивных напряжений не используются.

Численное решение краевой задачи о генерации реактивных напряжений в толстостенной трубе из СПФ, надетой без зазора на упругую трубу и испытывающей обратное фазовое превращение после прямого мартенситного перехода под действием постоянного внутреннего давления [18], получено в [19] в рамках простейшего варианта модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [13,14]. Численные решения аналогичных задач в рамках структурно-аналитической модели поведения СПФ [20] получены

в [21]. Аналогичные задачи для прямого и обратного превращения в стержне круглого поперечного сечения из СПФ, находящегося под действием крутящего момента, решены в [22,23]. При этом в работах [18,19,22,23] возможность пластического деформирования СПФ не учитывалась, что привело к существенным ограничениям решений [19] по величине предварительной деформации.

В данной работе эти ограничения сняты в рамках простейшей модели, предполагающей наличие единой диаграммы пластического деформирования СПФ. Кроме того, полученные ниже решения являются аналитическим. Поэтому соответствующие формулы удобно использовать для проектирования силовозбудителей с рабочими телами из СПФ.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВАРИАНТЫ СИСТЕМЫ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ СПФ

В данной работе рассматривается задача о генерации реактивных напряжений в стержне постоянного поперечного сечения из СПФ, которому в процессе охлаждения под действием постоянного растягивающего напряжения σ_1 и соответствующего полного прямого мартенситного превращения задана начальная растягивающая деформация. Далее происходит изотермическая разгрузка, при которой по предположению, обратного превращения не наблюдается.

После разгрузки длина стержня жестко фиксируется. Далее следует нагрев, происходит обратное мартенситное превращение и снятие ранее приобретенных фазовых деформаций за счет явления памяти формы. Для упрощения вычислений весьма малые чисто температурные деформации СПФ в данной работе не учитываются.

Для теоретического моделирования процесса развития реактивных напряжений используется система определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [12-17], одномерный вариант которой сводится к следующим уравнениям

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{phst}, \quad \varepsilon^{phst} = \varepsilon_0 q + \varepsilon^{phst'}, \quad \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E(q)}, \quad \frac{1}{E(q)} = \frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A}, \quad (1.1)$$

$$d\varepsilon^{phst'} = d\varepsilon^{ph} + d\varepsilon^{st} \\ d\varepsilon^{st} = q_{st} \rho_D F_2'(|\sigma|) d\sigma \quad (1.2)$$

Для прямого термоупругого фазового превращения [13]

$$d\varepsilon^{ph} = \left[\text{sign}(\sigma) \rho_D (1 - qf(q)) F_1(|\sigma|) + f(q) \varepsilon^{phst'} \right] dq \quad (1.3)$$

Для обратного превращения

$$d\varepsilon^{ph} = \frac{\varepsilon^{phst'}}{q} dq \quad (1.4)$$

Процессы термоупругих мартенситных фазовых переходов определяются соотношением [24]

$$q = 0.5(1 - \cos(\pi t)), \quad (1.5)$$

где для прямого превращения [12,13]

$$t = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0},$$

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{|\sigma| \rho_D (1 - qf(q)) F_1(|\sigma|) + f(q) \varepsilon^{phst} \sigma + Z(\sigma) + \sigma \varepsilon_0}{\Delta S}$$

а для обратного превращения [12,14]

$$t = 1 - \frac{T - A_s^\sigma}{A_f^0 - A_s^0}, \quad A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\varepsilon^{phst} \sigma / q + Z(\sigma) + \sigma \varepsilon_0}{\Delta S} \quad (1.6)$$

$$Z = \frac{\Delta E \sigma^2}{2E_A E_M}, \quad \Delta E = E_A - E_M$$

Зависимости (1.5) и (1.6) позволяют явно выразить температуру через напряжения, деформации и параметр фазового состава для обратного фазового превращения

$$T = T^0(q) + \frac{\varepsilon^{phst} \sigma / q + Z(\sigma) + \sigma \varepsilon_0}{\Delta S}, \quad (1.7)$$

$$T^0(q) = A_f^0 - \frac{A_f^0 - A_s^0}{\pi} \arccos(1 - 2q)$$

Здесь $\varepsilon, \varepsilon^e, \varepsilon^{phst}, \varepsilon^{phst \prime}$ – полная, упругая, фазово-структурная деформация и ее девиаторная часть; q – объемная доля мартенситной фазы; ε_0 – линейная деформация объемного эффекта прямого фазового превращения; $d\varepsilon^{ph}, d\varepsilon^{st}$ – приращения девиатора фазово-структурной деформации за счет фазового и структурного переходов соответственно (под структурным превращением здесь понимается увеличение степени ориентированности низкосимметричных мартенситных структур представительного объема, раздвойникование, переориентация мартенсита, происходящие при росте напряжений [2,3]); $F_1(|\sigma|)$ – материальная функция, интерпретируемая как функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ (аустенитное фазовое состояние), $F_2(|\sigma|)$ и $F_2'(|\sigma|)$ – функция и плотность распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ (мартенситное фазовое состояние); $f(q)$ – материальная функция, определяющая соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов при прямом фазовом превращении; легко видеть, что уравнение для фазовых деформаций при прямом превращении (1.3) переходит в уравнение для фазовых деформаций при обратном превращении (1.4) при $f(q) = 1/q$; $M_s^0, M_f^0, A_s^0, A_f^0$ – температуры начала (индекс s) или окончания (индекс f) прямого (символ M) или обратного (символ A) фазового перехода в свободном от напряжения состоянии, M_s^σ, A_s^σ – аналогичные величины в случае действия напряжения σ ; E_A, E_M – значения модуля Юнга в аустенитном и мартенситном состояниях соответственно; ΔS – параметр материала, имеющий смысл изменения объемной плотности энтропии при переходе из мартенситного фазового состояния в аустенитное; функция $T^0(q)$ дает значение температуры, соответствующее величине q при обратном превращении в свободном от напряжений СПФ.

Рассматриваемые здесь варианты модели различаются условиями, при которых происходит структурное превращение, $d\varepsilon^{st} \neq 0$ (1.2). Простейшее предположение состоит в том, что при обратном термоупругом фазовом превращении, сопровождающемся явлением памяти формы, развитие структурных деформаций (т.е. явление мартенситной неупругости) рассматривать вообще не следует, $d\varepsilon^{st} = 0$ всегда при обратном превращении (первая модель [13]). В рамках таких представлений при обратном превращении следует считать

$$q_{st} = 0 \quad (1.8)$$

В рассматриваемом процессе обратного превращения в заэволюционном состоянии убывание объемной доли мартенсита q происходит при росте напряжений. Поэтому естественно предположить [14], что в еще не перешедшей в аустенитное состояние мартенситной части представительного объема должно происходить структурное превращение. Исходя из этих соображений, общим для всех дальнейших вариантов модели необходимым условием развития структурных деформаций является требование возрастания интенсивности напряжений, которое для одномерного случая имеет вид

$$d(|\sigma|) > 0 \quad (1.9)$$

В рамках второй модели условие (1.9) является не только необходимым, но и достаточным для развития структурных деформаций. При выполнении условия (1.9) в (1.2) следует положить

$$q_{st} = q \quad (1.10)$$

т.е. вся мартенситная часть представительного объема испытывает структурный переход. При невыполнении (1.9) справедливо (1.8).

В теориях пластичности достаточные условия активного нагружения включают в себя, помимо выполнения дифференциального неравенства типа (1.9), еще и требование того, чтобы точка, изображающая напряженное состояние, находилась на поверхности нагружения (иначе не описывается явление деформационного упрочнения). В случае изотропного упрочнения и критерия текучести Мизеса, одномерный вариант такого условия состоит в том, чтобы величина $|\sigma|$ достигала в данный момент своего максимального значения за все время рассматриваемого процесса

$$|\sigma| = |\sigma|_{\max} \quad (1.11)$$

Выполнение соотношений (1.9), (1.11) являются достаточными условиями развития структурных деформаций в рамках третьей модели. При этом опять следует считать справедливым соотношение (1.10). Если хотя бы одно из условий (1.9) или (1.11) не выполнено, то надо использовать (1.8).

Описанные выше варианты опираются на предположение о существовании для всех мартенситных элементов представительного объема единой поверхности нагружения (в одномерном случае – единого значения напряжения начала структурного превращения – аналога предела текучести). В [25] обнаружено явление перекрестного упрочнения, состоящее в том, что мартенсит, возникший при прямом превращении под действием напряжения σ_1 имеет повышенное значение напряжения начала структурного превращения, коррелирующее с величиной σ_1 . В результате оказывается, что в случае прямого превращения, происходящего под действием меняющихся напряжений, различные мартенситные элементы представительного объема могут иметь различные

значения напряжения начала структурного превращения σ^* . При росте интенсивности напряжений структурный переход испытывают не все элементы представительного объема, а лишь те, для которых величина σ^* равна интенсивности действующего в данный момент в представительном объеме напряжения.

В [16] предложена модель развития структурных деформаций, учитывающая это обстоятельство. В рамках этой модели процесс структурного деформирования контролируется не нахождением точки, изображающей напряженное состояние на общей для всей мартенситной части представительного объема поверхности нагружения (которая, вообще говоря, не существует), а совокупной объемной долей q_{st} тех мартенситных элементов, которые испытывают в данный момент структурное превращение. Алгоритм определения величины q_{st} подробно описан в [16]. В качестве четвертого варианта модели поведения СПФ, используемого в данной работе, применяются как раз соотношения, предложенные в [16].

Приведенная выше определяющие соотношения для деформаций (1.2)-(1.4) представляет собой уравнения в приращениях, которые, вообще говоря, не интегрируются без знания пути термоупругого нагружения. Однако в некоторых частных случаях эту систему дифференциальных соотношений можно заменить эквивалентными конечными соотношениями, связывающими напряжения, деформации, параметр фазового состава и температуру. В [14] установлено положение об активных процессах пропорционального нагружения, которое для рассматриваемого здесь одномерного случая может быть переформулировано следующим образом:

1. Рассматривается фрагмент процесса фазовых и (или) структурных переходов на котором отсутствует разгрузка

$$d(|\sigma|) \geq 0 \quad (1.12)$$

2. Множитель q_{st} в (1.2) для всего рассматриваемого участка процесса удовлетворяет условию

$$q_{st} = q \quad (1.13)$$

3. Выполняется соотношение

$$F_1(|\sigma|) = F_2(|\sigma|) = F(|\sigma|) \quad (1.14)$$

При выполнении этих условий приведенные выше дифференциальные соотношения для фазово-структурной деформации могут быть проинтегрированы независимо от пути термомеханического нагружения, что приводит к зависимости

$$\varepsilon^{phst} = \rho_D F(|\sigma|) q + [\varepsilon^0 - \rho_D F(|\sigma_0|) q_0] \exp \left(\int_{q_0}^q f(\xi) d\xi \right) \quad (1.15)$$

Решение (1.15) соответствует начальным условиям

$$\varepsilon^{phst}(\sigma_0, q_0) = \varepsilon^0 \quad (1.16)$$

т.е. ε^0 – значение компоненты девиатора фазово – структурной деформации в начальной точке процесса при $\sigma = \sigma_0$, $q = q_0$.

Ту же зависимость можно записать в компонентах деформаций, включающих в себя как девиаторную часть, так и деформацию объемного эффекта реакции фазового превращения ε^{phst} , ε^0

$$\varepsilon^{phst} = \varepsilon_0 q + \rho_D F(|\sigma|) q + \left\{ \varepsilon^0 - [\varepsilon_0 q_0 + \rho_D F(|\sigma_0|) q_0] \right\} \exp \left(\int_{q_0}^q f(\xi) d\xi \right) \quad (1.17)$$

Решение (1.17) соответствует начальному условию $\varepsilon^{phst}(\sigma_0, q_0) = \varepsilon^0$. Все деформации отсчитываются от полностью аустенитного ненагруженного фазового состояния.

Решение (1.15) справедливо, если на рассматриваемом участке процесса происходит прямое превращение. В случае обратного превращения вместо (1.15) (1.17) справедливы соотношения, которые могут быть получены из (1.15), (1.17), если в последних положить $f(q) = 1/q$

$$\varepsilon^{phst'} = \rho_D F(|\sigma|) q + \left(\varepsilon^{0'} - \rho_D F(|\sigma_0|) q_0 \right) \frac{q}{q_0} \quad (1.18)$$

$$\varepsilon^{phst} = \left\{ \frac{\varepsilon^0}{q_0} + \rho_D [F(|\sigma|) - F(|\sigma_0|)] \right\} q \quad (1.19)$$

В случае обратного превращения из полностью мартенситного ненагруженного состояния ($q_0 = 1, \sigma_0 = 0$) из (1.19) получается

$$\varepsilon^{phst} = [\varepsilon^0 + \rho_D F(|\sigma|)] q \quad (1.20)$$

Если начальные условия таковы, что $\varepsilon^{0'} = \rho_D F(|\sigma_0|) q_0$, $\varepsilon^0 = \varepsilon_0 q_0 + \rho_D F(|\sigma_0|) q_0$ то решения (1.15), (1.17), (1.18), (1.19) упрощаются

$$\varepsilon^{phst'} = \rho_D q F(|\sigma|), \quad \varepsilon^{phst} = \varepsilon_0 q + \rho_D F(|\sigma|) q \quad (1.21)$$

В частности, решения (1.21) справедливы, если начальным состоянием для рассматриваемого процесса является полностью аустенитное фазовое состояние ($q_0 = \varepsilon_0 = 0$) или ненагруженное состояние хаотического (полностью двойникованного) мартенсита ($\varepsilon_0 = \sigma_0 = 0$), при условии, что $F(0) = 0$.

Если прямое превращение происходит при постоянном напряжении, то требования (1.13) и (1.14) могут не выполняться, а соотношение (1.15) или (1.21) справедливы для $F(|\sigma|) = F_1(|\sigma|)$. Если речь идет об обратном превращении, то выполнение требования (1.14) также не обязательно и соотношения (1.18), (1.19) или (1.21) справедливы для $F(|\sigma|) = F_2(|\sigma|)$.

Еще один случай интегрируемости определяющих соотношений для деформаций в приращениях независимо от пути термомеханического нагружения соответствует обратному фазовому превращению под действием невозрастающего значения $|\sigma|$, или, что то же, случаю отсутствия структурного превращения при обратном превращении. В этом случае $d\varepsilon^{st} = 0$, $d\varepsilon^{ph'} = d\varepsilon^{phst'}$, уравнение (1.4) может быть переписано в форме $d\varepsilon^{phst'} = \varepsilon^{phst'} dq/q$ и его решение, соответствующее начальному условию $\varepsilon^{phst'}(q_0) = \varepsilon^{0'}$ имеет вид

$$\varepsilon^{phst'} = \frac{\varepsilon^{0'}}{q_0} q, \quad \varepsilon^{phst} = \left(\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon^{0'}}{q_0} \right) q \quad (1.22)$$

Для решений (1.18), (1.19), справедливых, если модуль напряжений не убывает и (1.22), справедливого, когда модуль напряжений не возрастает, общим

случаем является процесс, в котором модуль напряжения сохраняет постоянное значение

$$|\sigma| = |\sigma_0| \quad (1.23)$$

Легко видеть, что в случае выполнения (1.23) уравнения (1.18) и (1.19) превращаются в (1.22).

Ниже будет показано, что получить адекватное описание процесса генерирования реактивных напряжений при не слишком малых начальных деформациях без учета возможности пластического деформирования СПФ по дислокационному механизму не удастся. Могут быть рассмотрены следующие варианты учета пластической деформации СПФ в процессе обратного превращения. Если предположить, что дислокационный предел текучести мартенситной фазы σ_{sM} существенно ниже аналогичной величины для аустенитной фазы, то естественно учитывать пластическую деформацию мартенсита. Простейший вариант такого учета при монотонном нагружении можно осуществить в соответствии с формулой

$$d\varepsilon^{pl} = \begin{cases} qm \left(\frac{|\sigma| - \sigma_{sM}}{\sigma_{0M}} \right)^{m-1} \frac{d\sigma}{\sigma_{0M}} & \text{при } |\sigma| > \sigma_{sM} \text{ и } d(|\sigma|) > 0 \\ 0 & \text{при } |\sigma| \leq \sigma_{sM} \text{ или } d(|\sigma|) \leq 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

В (1.24) σ_{0M}, m – параметры материала, значение которых можно получить исходя из диаграммы пластического деформирования СПФ в полностью мартенситном фазовом состоянии (при $q = 1$), которая согласно (1.24), имеет вид

$$\varepsilon^{pl} = \begin{cases} \left(\frac{|\sigma| - \sigma_{sM}}{\sigma_{0M}} \right)^m & \text{при } |\sigma| > \sigma_{sM} \\ 0 & \text{при } |\sigma| \leq \sigma_{sM} \end{cases}$$

Если предположить, что дислокационный предел текучести аустенита σ_{sA} существенно ниже аналогичной величины для мартенситной фазы, то следует учитывать пластическую деформацию аустенита. В этом случае может быть использовано соотношение

$$d\varepsilon^{pl} = \begin{cases} (1-q)n \left(\frac{|\sigma| - \sigma_{sA}}{\sigma_{0A}} \right)^{n-1} \frac{d\sigma}{\sigma_{0A}} & \text{при } |\sigma| > \sigma_{sA} \text{ и } d(|\sigma|) > 0 \\ 0 & \text{при } |\sigma| \leq \sigma_{sA} \text{ и (или) } d(|\sigma|) \leq 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

параметры которого σ_{sA}, σ_{0A} могут быть определены по известной из эксперимента диаграмме монотонного нагружения СПФ, находящегося в полностью аустенитном фазовом состоянии ($q = 0$), которая, в соответствие с (1.25) имеет уравнение

$$\varepsilon^{pl} = \begin{cases} \left(\frac{|\sigma| - \sigma_{sA}}{\sigma_{0A}} \right)^n & \text{при } |\sigma| > \sigma_{sA} \text{ и } d(|\sigma|) > 0 \\ 0 & \text{при } |\sigma| \leq \sigma_{sA} \text{ и (или) } d(|\sigma|) \leq 0 \end{cases}$$

Если растущие при обратном превращении реактивные напряжения будут превосходить пределы текучести, как мартенситной, так и аустенитной фаз, при анализе следует учитывать суммарный вклад в деформация обеих формул (1.24) и

(1.25). Это особенно просто сделать, если предположить, что параметры законов пластичности для аустенита и мартенсита одинаковы

$$\sigma_{sA} = \sigma_{sM} = \sigma_s, \sigma_{0A} = \sigma_{0M} = \sigma_{00}, m = n \quad (1.26)$$

или считать, что существует некая осредненная диаграмма пластического деформирования СПФ, не зависящая от значения параметра фазового состава. Принятие данной гипотезы позволяет получить аналитическое решение рассматриваемой задачи. В этом случае сумма приращений пластической деформации, вычисляемых с помощью (1.24) и (1.25) от q не зависит, и соответствующее соотношение может использоваться в проинтегрированном виде

$$\varepsilon^{pl} = \begin{cases} \left(\frac{|\sigma| - \sigma_s}{\sigma_{00}} \right)^n & \text{при } |\sigma| > \sigma_s \text{ и } d|\sigma| > 0 \\ 0 & \text{при } |\sigma| \leq \sigma_s \text{ и (или) } d(|\sigma|) \leq 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРИ УПРОЩЕННОМ ОПИСАНИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В данном пункте с целью получения аналитических решений принимается упрощенная модель пластического деформирования СПФ при обратном превращении (1.26), (1.27). Предполагается, что накопление предварительных неупругих деформаций имеет место при полном прямом превращении в материале стержня, происходящем под действием постоянного растягивающего напряжения σ_1 . Легко видеть, что нагрев стержня после разгрузки и заневоливания приведет к развитию растягивающих напряжений. Поэтому знак модуля у величины σ далее опускается. Используя справедливое для случая прямого превращения происходящего под действием постоянного напряжения положение об активных процессах пропорционального нагружения, для деформации ε_1 стержня после полного прямого превращения и разгрузки можно получить выражение

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \rho_D F_1(\sigma_1) \quad (2.1)$$

В рамках первой из описанных выше моделей при обратном превращении развития структурных деформаций не происходит, поэтому всегда $q_{st} = 0$. В этом случае для фазово-структурных деформаций с самого начала процесса может быть применены решения (1.22), в которых следует положить $\varepsilon^0 = \rho_D F_1(\sigma_1)$. В результате для суммарной деформации при обратном превращении получается

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 q + \sigma \left(\frac{1}{E_A} + \frac{q(E_A - E_M)}{E_A E_M} \right) & \text{при } \sigma \leq \sigma_s \\ \varepsilon_1 q + \sigma \left(\frac{1}{E_A} + \frac{q(E_A - E_M)}{E_A E_M} \right) + \left(\frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_{00}} \right)^n & \text{при } \sigma \geq \sigma_s \end{cases} \quad (2.2)$$

Приравняв ε (2.2) фиксированному значению ε_1 (2.1) можно получить следующую связь между реактивными напряжениями σ и q , соответствующую первой модели

$$q = \begin{cases} \frac{E_A \varepsilon_1 - \sigma}{E_A \varepsilon_1 + \lambda \sigma} & \text{при } \sigma \leq \sigma_s \\ \frac{E_A \left[\varepsilon_1 - \left(\frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_{00}} \right)^m \right] - \sigma}{E_A \varepsilon_1 + \lambda \sigma} & \text{при } \sigma \geq \sigma_s \end{cases} \quad (2.3)$$

В (2.3) и далее используется обозначение $\lambda = E_A / E_M - 1$.

Зависимости (2.3) и (1.7) позволяют найти искомую связь между температурой и реактивными напряжениями

$$T = T^0(q) + \frac{\sigma \varepsilon_1 + Z(\sigma)}{\Delta S} \quad (2.4)$$

В рамках второй модели в предположении о монотонном возрастании реактивных напряжений при обратном превращении всегда будет $q_{st} = q$. В этом случае положение об активных процессах пропорционального нагружения справедливо с самого начала и до конца процесса обратного превращения. Для начальных значений выполняется

$$\varepsilon^0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \rho_D F_1(\sigma_1), \quad \sigma_0 = 0, \quad q_0 = 1 \quad (2.5)$$

Согласно (1.20) и (2.1) $\varepsilon^{phst} = [\varepsilon_1 + \rho_D F_2(\sigma)] q$ и при $\sigma \geq \sigma_s$ для суммарной деформации получается

$$\varepsilon = [\varepsilon_1 + \rho_D F_2(\sigma)] q + \sigma \left[\frac{1}{E_A} + \frac{E_A - E_M}{E_A E_M} q \right] + \frac{1}{n} \left(\frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_{00}} \right)^n \quad (2.6)$$

Из (2.6) и условия заневоливания для второй модели получается

$$q = \begin{cases} \frac{E_A \varepsilon_1 - \sigma}{E_A [\varepsilon_1 + \rho_D F_2(\sigma)] + \lambda \sigma} & \text{при } \sigma \leq \sigma_s \\ \frac{E_A \left[\varepsilon_1 - \left(\frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_{00}} \right)^m \right] - \sigma}{E_A [\varepsilon_1 + \rho_D F_2(\sigma)] + \lambda \sigma} & \text{при } \sigma \geq \sigma_s \end{cases} \quad (2.7)$$

Связь между температурой и реактивными напряжениями в рамках второй модели сводится к формуле

$$T = T^0(q) + \frac{[\varepsilon_1 + \rho_D F_2(\sigma)] \sigma + Z(\sigma)}{\Delta S} \quad (2.8)$$

При прямом превращении под действием постоянного напряжения все мартенситные элементы образуются при действии одного и того же напряжения σ_1 , которое и является максимальным значением интенсивности напряжений за всю историю существования каждого мартенситного элемента. Поэтому в данном случае, как в рамках третьей, так и в рамках четвертой модели при обратном превращении справедливо соотношение

$$q_{st} = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma < \sigma_1 \\ q & \text{при } \sigma \geq \sigma_1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Далее предполагается, что $\sigma_1 < \sigma_s$ (задавать начальную деформацию при прямом превращении под действием напряжения выше предела текучести и

создавать при этом пластическую невозвращаемую деформацию еще на этапе предварительного деформирования нерационально). Согласно (2.9) для определения деформации на этапе обратного превращения для $\sigma \leq \sigma_1$ можно использовать первую формулу (2.2). Для $\sigma \geq \sigma_1$ применяется положение об активных процессах пропорционального нагружения. Начальное значение для напряжения равно $\sigma_0 = \sigma_1$. Начальное значение q_0 определяется из первой формулы (2.3) при $\sigma = \sigma_1$: $q_0 = (E_A \varepsilon_1 - \sigma_1) / (E_A \varepsilon_1 + \lambda \sigma_1)$ а начальное значение фазово-структурной деформации получается по формуле (1.22): $\varepsilon^0 = \varepsilon^{phst}(q_0) = \varepsilon_1 q_0$. Подставляя полученные начальные условия в (1.19) получаем

$$\varepsilon^{phst} = \left\{ \varepsilon_1 + \rho_D [F_2(\sigma) - F_2(\sigma_1)] \right\} q \quad (2.10)$$

Добавляя к фазово-структурной деформации (2.10) упругую и пластическую составляющие и удовлетворяя условию постоянства деформации, можно получить в рамках третьей и четвертой моделей

$$q = \begin{cases} \frac{E_A \varepsilon_1 - \sigma}{E_A \varepsilon_1 + \lambda \sigma} & \text{при } 0 \leq \sigma \leq \sigma_1 \\ \frac{E_A \varepsilon_1 - \sigma}{E_A \left\{ \varepsilon_1 + \rho_D [F_2(\sigma) - F_2(\sigma_1)] \right\} + \lambda \sigma} & \text{при } \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_s \\ \frac{E_A \left[\varepsilon_1 - \left(\frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_{00}} \right)^m \right] - \sigma}{E_A \left\{ \varepsilon_1 + \rho_D [F_2(\sigma) - F_2(\sigma_1)] \right\} + \lambda \sigma} & \text{при } \sigma_s \leq \sigma \end{cases} \quad (2.11)$$

Связь между температурой и напряжениями в рамках третьей и четвертой модели принимает вид

$$T = \begin{cases} T^0(q) + \frac{\varepsilon_1 \sigma + Z(\sigma)}{\Delta S} & \text{при } \sigma \leq \sigma_1 \\ T^0(q) + \frac{\left\{ \varepsilon_1 + \rho_D [F_2(\sigma) - F_2(\sigma_1)] \right\} \sigma + Z(\sigma)}{\Delta S} & \text{при } \sigma \geq \sigma_1 \end{cases} \quad (2.12)$$

Определение зависимости реактивных напряжений от температуры по приведенным выше формулам (2.3), (2.4), (2.7), (2.8) или (2.11), (2.12) следует вести вплоть до окончания обратного превращения, т.е. до значения $q = 0$. Поэтому максимальные значения реактивных напряжений определяются, исходя из условия обращения в нуль числителей формул (2.3), (2.7) или (2.11) для первой, второй или третьей и четвертой моделей соответственно. Поскольку числители эти одинаковы, то максимальные значения реактивных напряжений в рамках перечисленных выше моделей не различаются и определяются из соотношений $\sigma_{\max} = E_A \left[\varepsilon_0 + \rho_D F_1(\sigma_1) \right]$ при условии, что

$$\varepsilon_0 + \rho_D F_1(\sigma_1) \leq \sigma_s / E_A \quad (2.13)$$

Если же условие (2.13) не выполняется, то максимальные значения реактивных напряжений находится из уравнения

$$E_A \left[\varepsilon_0 + \rho_D F_1(\sigma_1) - \left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_s}{\sigma_{00}} \right)^m \right] = \sigma_{\max} \quad (2.14)$$

Неравенство (2.13) является фактически условием того, что при решении рассматриваемой проблемы не следует учитывать возможность пластической деформации СПФ. Смысл этого условия состоит в том, что фазовая деформация, накопленная в процессе предварительного прямого превращения под действием напряжения σ_1 не должна превышать упругой деформации СПФ, при напряжении, равном пределу текучести, вычисленной для аустенитного значения модуля Юнга. Это ограничение является чрезвычайно жестким. Например, для значений $\sigma_s = 400$ МПа, $E_A = 80000$ МПа, характерных для никелида титана, оказывается, что предварительная деформация ограничена весьма малой величиной в 0.5%, что составляет малую долю деформационных возможностей никелида титана при прямом фазовом превращении, которая составляет около 8%. Тем самым, обосновывается необходимость учета пластических деформаций при анализе развития реактивных напряжений в СПФ.

В экспериментальных исследованиях реактивных напряжений в СПФ часто приводят графики зависимости максимальных значений реактивных напряжений от величины предварительной неупругой деформации ε_1 [1,3-5]. Эта зависимость в рамках всех рассмотренных здесь моделей имеет аналитическое выражение

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \frac{\sigma_{\max}}{E_A} & \text{при } \sigma_{\max} \leq \sigma_s \\ \frac{\sigma_{\max}}{E_A} + \left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_s}{\sigma_{00}} \right)^m & \text{при } \sigma_{\max} \geq \sigma_s \end{cases} \quad (2.15)$$

Согласно (2.15) в рамках принятой здесь гипотезы о том, что диаграммы зависимости пластической деформации от напряжений в аустенитном и мартенситном состоянии СПФ совпадают, получается, что зависимость максимальных значений реактивных напряжений от предварительной деформации идентична диаграмме упругопластического деформирования СПФ в аустенитном фазовом состоянии. Такого типа гипотеза высказана в [9], там же приведено ее экспериментальное подтверждение. В то же время, в [4,8] приведены экспериментальные данные, согласно которым график зависимости максимальных реактивных напряжений от величины предварительной деформации располагается существенно ниже (ближе к оси деформаций), чем диаграмма растяжения СПФ в аустенитном фазовом состоянии. Поскольку рост пластических деформаций при обратном превращении ведет к снижению величины реактивных напряжений, то следует признать, что пластические деформации должны развиваться в мартенситной части представительного объема СПФ более интенсивно, чем в аустенитной части этого объема. Для учета этого эффекта следует использовать для приращения пластической деформации сумму правых частей (1.24) и (1.25) и проблема сведется к численному решению нелинейных дифференциальных уравнений.

Далее будут использоваться следующие безразмерные величины и функции

$$s = \frac{\sigma}{\sigma_{01}}, \quad s_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_{01}}, \quad s_T = \frac{\sigma_s}{\sigma_{01}},$$

$$s_0 = \frac{\sigma_{00}}{\sigma_{01}}, \quad k = \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{02}}, \quad E_1 = \frac{E_A}{\sigma_{01}}, \quad \delta S = \frac{\Delta S (A_f^0 - A_s^0)}{\sigma_{01}},$$

$$F_1(\sigma) = \varphi_1\left(\frac{\sigma}{\sigma_{01}}\right), \quad \varphi_1(x) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$F_2(\sigma) = \varphi_2\left(\frac{\sigma}{\sigma_{02}}\right), \quad \varphi_2(x) = 1 - (-x^\alpha)$$

Выбор функций φ_1 и φ_2 соответствует предположению о том, что микронапряжения в аустенитном состоянии СПФ имеют нормальное распределение, а в мартенситном – распределение Вейбулла [13].

Начальная неупругая деформация в безразмерных переменных определяется по формуле $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \rho_D \varphi_1(s_1)$. Решение в рамках первой модели в безразмерных переменных принимает вид

$$q = \begin{cases} \frac{E_1 \varepsilon_1 - s}{E_1 \varepsilon_1 + s \lambda} & \text{при } s \leq s_T \\ \frac{E_1 \left[\varepsilon_1 - \left(\frac{s - s_T}{s_0} \right)^m \right] - s}{E_1 \varepsilon_1 + s \lambda} & \text{при } s \geq s_T \end{cases}$$

$$T = T^0(q) + (A_f^0 - A_s^0) \frac{\varepsilon_1 s + 0.5 s^2 \lambda / E_1}{\delta S_0}$$

Решение в безразмерных переменных в рамках второй модели есть

$$q = \begin{cases} \frac{E_1 \varepsilon_1 - s}{E_1 [\varepsilon_1 + \rho_D \varphi_2(ks)] + s \lambda} & \text{при } s \leq s_T \\ \frac{E_1 \left[\varepsilon_1 - \left(\frac{s - s_T}{s_0} \right)^m \right] - s}{E_1 [\varepsilon_1 + \rho_D \varphi_2(ks)] + s \lambda} & \text{при } s \geq s_T \end{cases}$$

$$T = T^0(q) + (A_f^0 - A_s^0) \frac{s \varepsilon_1 + \rho_D \varphi_2(ks) s + 0.5 s^2 \lambda / E_1}{\delta S_0}$$

Аналогичные зависимости в рамках третьей и четвертой модели имеют вид

$$q = \begin{cases} \frac{E_1 \varepsilon_1 - s}{E_1 \varepsilon_1 + s \lambda} & \text{при } 0 \leq s \leq s_1 \\ \frac{E_1 \varepsilon_1 - s}{E_1 \{ \varepsilon_1 + \rho_D [\varphi_2(ks) - \varphi_2(ks_1)] \} + s \lambda} & \text{при } s_1 \leq s \leq s_T \\ \frac{E_1 \left[\varepsilon_1 - \left(\frac{s - s_T}{s_0} \right)^m \right] - s}{E_1 \{ \varepsilon_1 + \rho_D [\varphi_2(ks) - \varphi_2(ks_1)] \} + s \lambda} & \text{при } s_T \leq s \end{cases}$$

$$T = \begin{cases} T^0(q) + (A_f^0 - A_s^0) \frac{s\varepsilon_1 + 0.5s^2\lambda / E_1}{\delta S_0} & \text{при } s \leq s_1 \\ T^0(q) + (A_f^0 - A_s^0) \frac{s\varepsilon_1 + \rho_D [\varphi_2(ks) - \varphi_2(ks_1)]s + 0.5s^2\lambda / E_1}{\delta S_0} & \text{при } s \geq s_1 \end{cases}$$

Уравнение для определения максимального значения реактивных напряжений (2.14) в безразмерных переменных для случая $\varepsilon_1 > \sigma_s / E_1$ есть

$$\varepsilon_0 + \rho_D \varphi_1(s_1) - \left(\frac{s_{\max} - s_T}{s_0} \right)^m = \frac{s_{\max}}{E_1}$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Далее для получения конкретных результатов используются следующие выражения для материальных констант, характерных для никелида титана [12,13]

$$\begin{aligned} \sigma_{01} &= 150 \text{ МПа}, \sigma_{02} = 70 \text{ МПа}, \alpha = 10, \sigma_s / \sigma_{01} = 3, \sigma_{00} / \sigma_{01} = 5, m = 3, \\ \rho_D &= 0.08, \varepsilon_0 = 0.001, E_A = 84000 \text{ МПа}, E_M = 28000 \text{ МПа}, A_s^0 = 50^\circ \text{C}, \\ A_f^0 &= 70^\circ \text{C}, \Delta S = 322000 \text{ Дж} / \text{м}^3 \text{К} \end{aligned}$$

На рис.1-4 (а,б) приведены графики зависимости безразмерных реактивных напряжений s от параметра фазового состава q (а) или от температуры T в градусах Цельсия (б) для значений безразмерного напряжения предварительного прямого превращения $s_1 = 0.3$ (рис.1), $s_1 = 0.4$ (рис.2), $s_1 = 0.5$ (рис.3), $s_1 = 0.6$ (рис.4). Номера кривых на рис.1-4 совпадают с номерами моделей в рамках которых построены эти кривые (моделям 3 и 4 соответствует номер кривых 3). Как видно, графики, соответствующие моделям №3,4 всегда расположены между графиками, соответствующими моделям №1 и №2. Согласно рис.1, для малых значений напряжения σ_1 практически совпадают между собой зависимости, построенные в рамках моделей №2 и №3,4 (жирные линии). В этом случае после небольшого начального участка резкого роста реактивных напряжений следует весьма продолжительный участок изменения q , на протяжении которого реактивные напряжения почти не растут. По достижении величиной q достаточно малых значений (порядка $q = 0.2$) начинается участок резкого роста реактивных напряжений, заканчивающийся с окончанием обратного превращения. В то же время в рамках первой модели интенсивный рост реактивных напряжений происходит на протяжении всего обратного превращения.

С ростом величины напряжения σ_1 кривые, соответствующие третьей и четвертой моделям отодвигаются от кривых, соответствующих второй модели и передвигаются в направлении графиков, построенных в рамках модели №1 (рис.2,3). Для достаточно больших значений напряжения σ_1 весьма близки друг к другу результаты, получаемые в рамках моделей №1 и №3,4 (жирные линии), причем они существенно отличаются от результатов, даваемых моделью №2 (рис.4).

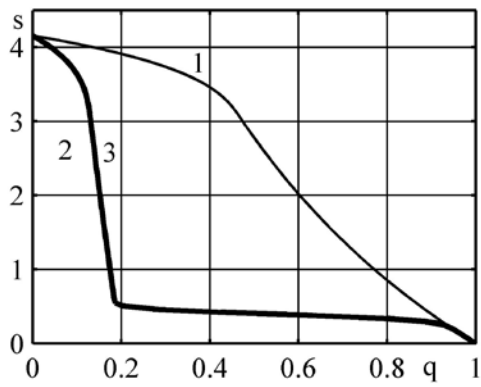


Рис.1а.

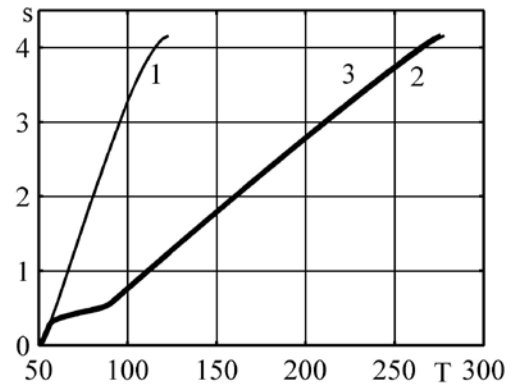


Рис.1б.

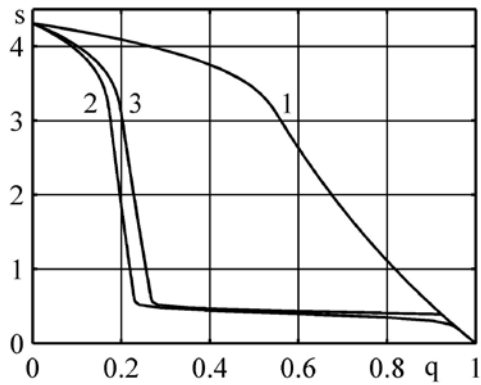


Рис.2а.

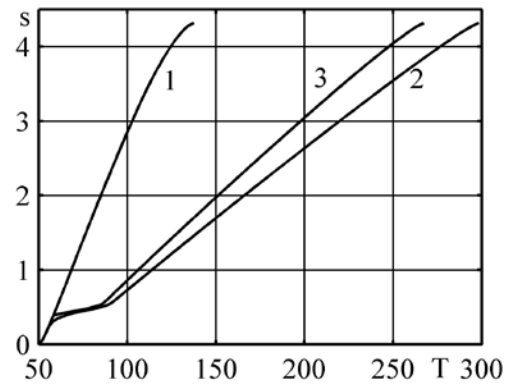


Рис.2б.

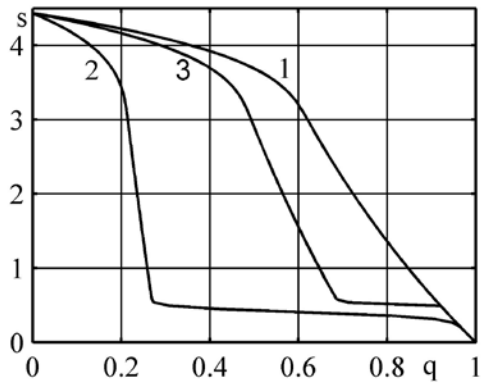


Рис.3а.

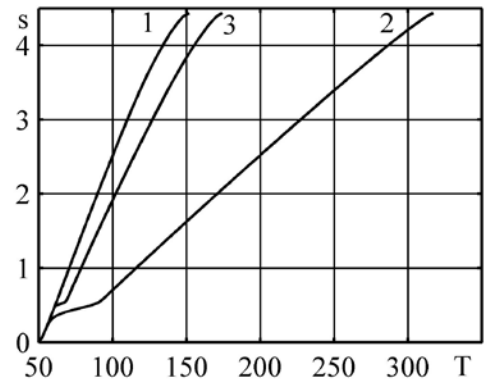


Рис.3б.

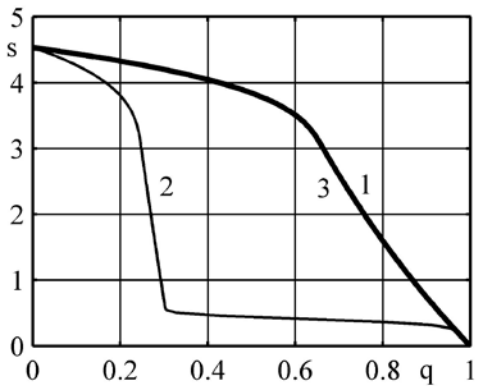


Рис.4а.

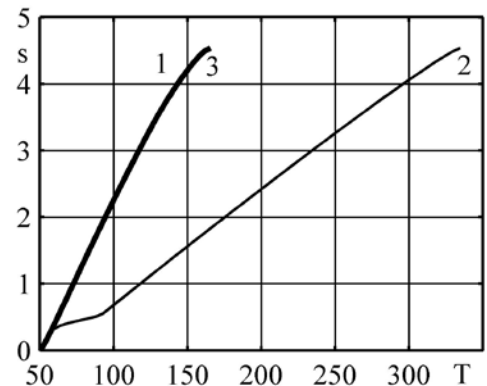


Рис.4б.

Согласно приведенным данным, максимальное значение реактивного напряжения не зависит от рассматриваемого варианта модели. Однако вторая важная характеристика процесса – температура окончания обратного превращения, по достижении которой реализуется максимальное значение реактивных напряжений, существенно зависит от используемой модели. Связано это обстоятельство с тем, что температура окончания обратного превращения, согласно соотношениям (1.5), (1.6), зависит не только от действующего напряжения, но и от девиатора соответствующей фазово – структурной деформации. Хотя при приближении к концу обратного перехода $\varepsilon^{phst} \rightarrow 0$, величина q также стремится к нулю. Значение температуры A_f^σ , согласно (1.5), (1.6) зависит от величины $\lim_{q \rightarrow 0} \varepsilon^{phst} / q$, которая получается существенно больше в рамках второй модели, чем в рамках первой. Поэтому максимальное значение A_f^σ получается в рамках второй модели, минимальные – в рамках первой модели. Разница между соответствующими результатами может достигать величины порядка $150^\circ C$.

Многочисленные применения СПФ в качестве материала для создания рабочих тел силовозбудителей (актуаторов) основаны на том обстоятельстве, что напряжение рабочего хода таких устройств, коррелирующее с величиной σ_{max} , превосходит напряжение холостого хода, которое коррелирует с величиной σ_1 . О величине соответствующего эффекта можно судить по графикам зависимости максимального значения безразмерных реактивных напряжений s_{max} от безразмерного значения напряжений, приложенных на предварительном этапе прямого превращения s_1

$$s_1 = \begin{cases} \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1} \left[\frac{1}{\rho_D} \left(\frac{s_{max}}{E_1} - \varepsilon_0 \right) \right] & \text{при } s_{max} \leq s_T \\ \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho_D} \left[\frac{s_{max}}{E_1} + \left(\frac{s_{max} - s_T}{s_0} \right)^m - \varepsilon_0 \right] \right\} & \text{при } s_{max} \geq s_T \end{cases} \quad (3.1)$$

На рис.5 приведена серия графиков зависимости (3.1) для тех же, что и ранее значений всех безразмерных постоянных материала, за исключением показателя m диаграммы пластического деформирования, значение которого совпадает с номером соответствующей кривой.

Как видно, с ростом показателя m разница между напряжениями рабочего и холостого хода возрастает.

На рис.6 приведены аналогичные кривые для ранее заданных значений всех параметров материала, кроме значения параметра s_0 , которое равно $s_0 = 3$ для кривой 1, $s_0 = 4$ для кривой 2, $s_0 = 5$ для кривой 3 и $s_0 = 6$ для кривой 4. Согласно рис.6, с ростом параметра s_0 разница между максимальным реактивным напряжением и напряжением предварительного этапа прямого превращения возрастает.

Переписав уравнение диаграммы пластического деформирования СПФ в виде

$$\Delta \sigma = \sigma_0 \varepsilon^{1/m}, \quad \Delta \sigma = \sigma - \sigma_s$$

легко понять, что с ростом параметров s_0 и m величина упрочнения $\Delta\sigma$ материала для тех же значений $\varepsilon < 1$ возрастает. Следовательно, чем интенсивнее происходит пластическое упрочнение СПФ, тем выгоднее использовать этот материал для создания рабочих тел силовозбудителей.

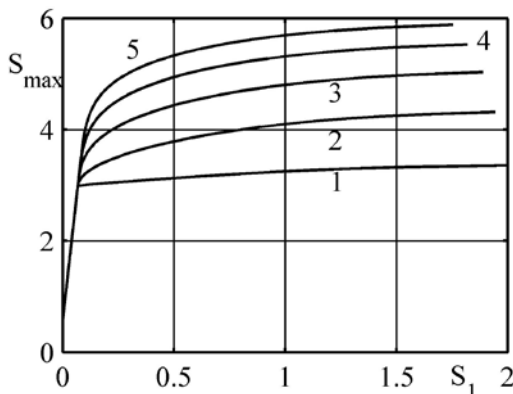


Рис.5.

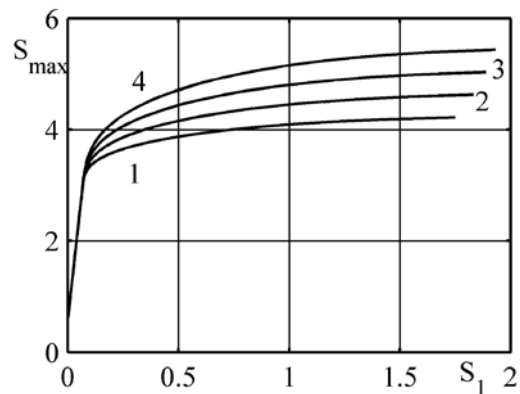


Рис.6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках трех вариантов модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях и дополнительного предположения о единой диаграмме упруго-пластического деформирования СПФ, не зависящей от значения параметра фазового состава, получены аналитические решения задачи о генерации реактивных напряжений в стержне из СПФ при обратном фазовом превращении в жестко задеформированном состоянии.

Установлено, что максимальное значение реактивного напряжения, генерируемого в рассматриваемых условиях, не зависит от того, учитывается ли и если учитывается, то каким образом структурное превращение СПФ при реализации явления памяти формы. Значение температуры, при которой достигается это максимальное значение больше в рамках модели, учитывающей эффект структурного перехода при обратном фазовом превращении.

Наиболее равномерный рост реактивных напряжений с ростом температуры получается в рамках модели, не учитывающей возможность структурного превращения при обратном фазовом переходе. В рамках модели, предполагающей, что структурный переход всей мартенситной части представительного объема происходит всегда, когда растут действующие напряжения, наблюдается существенная задержка процесса роста реактивных напряжений в средней части процедуры обратного фазового перехода и ускоренный рост реактивных напряжений на финальной части процесса обратного превращения.

Гипотеза о существовании единой диаграммы пластического деформирования СПФ приводит к выводу о совпадении графика зависимости максимального значения реактивных напряжений от величины предварительной неупругой деформации с диаграммой пластического деформирования аустенита. Из того, что, согласно экспериментальным данным, упомянутый выше график расположен ниже соответствующей диаграммы, следует, что в мартенситной части СПФ пластическая деформация развивается более интенсивно, чем в аустенитной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курдюмов Г.В., Хандрос Л.Г. О термоупругом равновесии при мартенситных превращениях // Докл. АН СССР. – 1949. – Т.66. – Вып.2. – С.211-214.
2. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck J., Delay L. Some results on the detwinning process in NiTi shape memory alloys // Scripta Materialia. – 1999. – Vol.41. – N12. – P.1273-1281.
3. Thamburaja P. Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys // J. Mech. and Phys. of Solids. – 2005. – Vol.53. – P.825-856.
4. Беляев С.П., Волков А.Е., Ермолаев В.А., Каменцева З.П., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Мозгунов В.Ф., Разов А.И., Хайров Р.Ю. Материалы с эффектом памяти формы: справочное издание. – СПб: Изд.-во НИИХ СПбГУ, 1998. – Т.2. – 374 с.
5. Анаев Б.А., Вороненко Б.И. Эффект запоминания в сплавах // Металловед. и терм. обработка мет. – 1973. – №1. – С.24-28.
6. Чернов Д.Б., Фаткуллина Л.П., Смирнова З.И., Тимонин Г.Д., Олейникова С.В. Характеристики восстановления формы у полуфабрикатов из никелида титана // Технология легких сплавов. – 1978. – №5. – С. 63-66.
7. Johnson W. A., Domingue J. A., Retchman S. H., Sczerzenie F. E. Monotonic and thermomechanical testing of P/M NiTi // J. phys. (Fr.). – Suppl.: ICOMAT-82. – 1982. – Vol.43. – N12. – P.291-296.
8. Беляков В.Н., Хусаинов М.А. Исследование реактивных напряжений в пружинных элементах из никелида титана // Материалы с эффектом памяти формы и их применение. – Новгород-Л., 1989. – С.24-27.
9. Лихачев В.А., Мастерова М.В., Маршалкин А.Н., Макаров А.Ю. Закономерности генерации реактивных напряжений в сплаве TiNi // Проблемы прочности. – 1983. – №4. – С.72-75.
10. Fumihoto Nishimura, Noriko Watanabe, Kikuaki Tanaka. Analysis of uniaxial stress-strain-temperature hysteresis in an Fe-based shape memory alloy under thermomechanical loading // Computational Materials Science. – 1997. – Vol.8. – P.349-362.
11. Шишкин С.В., Махутов Н.А. Расчет и проектирование силовых конструкций из сплавов с эффектом памяти формы // М.-Ижевск: Ниц «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 412 с.
12. Мовчан А.А., Казарина С.А., Мишустин И.В., Мовчан И.А. Термодинамическое обоснование модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Деформации и разрушение материалов. – 2009. – №8. – С.2-9.
13. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – №3. – С.118-130.
14. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы // Известия РАН. МТТ. – 2011. – №2. – С.44-56.
15. Мовчан А.А., Казарина С.А. Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.

16. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – №1. – С.37-53.
17. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – №2. – С.78-95.
18. Мовчан А.А., Машихин А.Е. Деформации кругового цилиндра из сплава с памятью формы при структурном переходе или прямом фазовом превращении // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №2. – С.235-247.
19. Машихин А.Е. Задача о контакте цилиндра из сплава с памятью формы с упругой трубой при обратном фазовом превращении // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.624-635.
20. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. – С.-Петербург: Наука, 1993. – 471 с.
21. Likhachev V.A., Razov A.I., Volkov A.E. Finite difference simulation of a thermomechanical coupling / Second International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies SMST-97. Proceedings / Asilomar Conference Center, Pacific Grove, California, USA, 1997. – P.335-340.
22. Саганов Е.Б. Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №3. – С.454-468.
23. Саганов Е.Б. Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.663-674.
24. Liang C., Rogers C.A. One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials // Appl. Math. Model. – 1990. – Vol.1. – N2. – P.207-235.
25. Мовчан А.А., Казарина С.А. Термоупругие превращения в образцах из никелида титана при одноступенчатом и двухступенчатом нагружении // Деформация и разрушение материалов. – 2006. – №7. – С.19-23.

Поступила в редакцию 23 июля 2015 года.

Сведения об авторах:

Мовчан Андрей Александрович – д.ф.-м.н., проф., г.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: movchan47@mail.ru
Кузнецова Наталия Сергеевна – аспирант, МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия