# ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА ФРАГМЕНТОВ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ РАЗЛЕТЕ КОЛЬЦА<sup>1</sup>

Головешкин В.А.\*,\*\*\*, Мягков Н.Н.\*, Пономарев А.В.\*\*

<sup>\*</sup>ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия <sup>\*\*</sup>Московский государственный университет информационных технологий, радиотехники и электроники МИРЭА, г. Москва, Россия

### РЕЗЮМЕ

В работах [1-2] предложена простая двумерная модель фрагментации быстро расширяющегося цилиндра в условиях вязкого поведения материала и плоской деформации. Модель позволяет оценить средний размер фрагмента и число фрагментов, образующихся в результате разрушения цилиндра. В настоящей работе показано, что предложенный подход [1-2] может быть использован для оценки количества фрагментов в трехмерной задаче фрагментации кольца.

**Ключевые слова:** модель фрагментации расширяющегося кольца; вязкое разрушение; плоская деформация

# ESTIMATE OF THE NUMBER OF FRAGMENTS FORMED DURING THE RAPID EXPANSION OF A RING.

Goloveshkin V.A.\*,\*\*, Myagkov N.N.\*, Ponomarev A.V.\*\*

\*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia \*\*Moscow State University of Information Technologies, Radioengineering and Electronics MIREA, Moscow, Russia

### SUMMARY

In works [1,2] we have proposed a simple two-dimensional model of fragmentation of rapidly expanding cylinders in conditions of the ductile behavior of the material and under plane strain. The model allows us to estimate the average size of the fragment and number of fragments produced by the destruction of the cylinder. In this paper we show that the method proposed in [1-2] can be used to estimate the number of fragments in a three-dimensional problem of fragmentation of rapidly expanding rings.

Key words: modeling of fragmentation of rapidly expanding rings; ductile fracture; plane strain

#### введение

В последние годы активно обсуждались [3] две одномерные теории фрагментации быстро расширяющихся металлических цилиндров, позволяющие оценить как средние длины фрагментов, так и число фрагментов. Первая – это статистическая теория Мотта, вторая – энергетическая теория Грэди [3,4].

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ (проект 15-01-00565).

В модели Мотта разрушение происходит мгновенно, а при оценке размера фрагмента энергия разрушения игнорируется и считается, что средняя длина фрагмента пропорциональна масштабу длины, являющейся единственной комбинацией предела текучести Y, плотности  $\rho$  и скорости деформации $\dot{\varepsilon}$ . Модифицированная теория Мотта [3] дает

$$s \propto \left(\frac{2\pi Y}{\rho \dot{\varepsilon}^2} \frac{\sigma}{n}\right)^{\frac{n}{2n+1}} \tag{1}$$

где *n* и  $\sigma$ - безразмерные параметры статистической модели.

Ключевой момент в теории фрагментации Грэди [3,4] – это учет энергии, диссипируемой при разрушении, и учет конечного времени разрушения. Как результат получается следующая оценка для средней длины фрагмента

$$s \propto \left(\frac{24\Gamma}{\rho \dot{\varepsilon}^2}\right)^{1/3} \tag{2}$$

где  $\Gamma = Y \cdot x_{c0} / 2$  - энергия разрушения,  $x_{c0}$  - критическое смещение при раскрытии трещины. Величина  $\Gamma$  может быть выражена через коэффициент интенсивности напряжений  $K_c$  следующим образом [1]  $K_c = \sqrt{2E\Gamma}$ , где E – модуль упругости.

В работах [1,2] нами была предложена простая модель фрагментации быстро расширяющегося цилиндра для случая вязкого поведения материала в условиях плоской деформации цилиндра. Отличие от моделей Мотта и Грэди состоит в том, что в [1,2] предложена двумерная схема образования шейки в месте разрыва. Кроме того, из механических свойств материала, данная модель использует только предел текучести. Для описания образования шейки брали поле скоростей, аналогичное тому, которое возникает непосредственно под гладким штампом в задаче Прандтля о внедрении штампа в полуплоскость [6]. Такой подход позволяет легко вычислить работу разрушения на единицу длины цилиндра [1,2]. В результате для средней длины фрагмента была получена формула

$$s = \left(\frac{16\sqrt{3} \cdot Ya}{\rho \dot{\varepsilon}^2}\right)^{1/3} \tag{3}$$

где *а* – половина толщины стенки цилиндра. Видно, что средний размер фрагмента здесь также зависит от скорости деформации по закону «2/3»:  $s \propto (\dot{\epsilon})^{-2/3}$ .

В настоящей работе показано, что предложенный подход [1-2] может быть использован для оценки количества фрагментов в трехмерной задаче фрагментации кольца.

# 1. МОДЕЛЬ ФРАГМЕНТАЦИИ РАСШИРЯЮЩЕГОСЯ КОЛЬЦА 1.1. Постановка задачи.

Рассмотрим кольцо, как область в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , заданную соотношениями |z| < b, R - a < r < R + a. Предполагаем, что механическое поведение материала кольца подчиняется закону идеальной

пластичности с пределом текучести  $\sigma_s$  и условию несжимаемости. Плотность материала обозначим  $\rho$ . Предположим, что в начальный момент поле скоростей в кольце определяется соотношениями

$$u_r = \frac{V_i R}{r}, \ u_{\varphi} = 0, \ u_z = 0$$
 (4)

Цель работы – оценить количество фрагментов, как функцию  $\sigma_s, \rho, R, a, b, V_i$ .

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть имеется фрагмент кольца |z| < b, R - a < r < R + a,  $|\varphi| < \alpha$ , с начальным распределением скоростей (4). Через некоторое время после образования, такой фрагмент будет двигаться как твердое тело со скоростью  $V_f$ . С учетом (4), начальные импульс  $P_i$  и энергия  $E_i$  фрагмента равны

$$P_{i} = 2b \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi \int_{R-a}^{R+a} \rho V_{i} R dr = 8\rho V_{i} R ab \sin \alpha$$
(5)

$$E_{i} = 2b \int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi \int_{R-a}^{R+a} \rho \frac{V_{i}^{2}R^{2}}{2r} dr = 2\rho V_{i}^{2} b \alpha R^{2} \ln \frac{R+a}{R-a}$$
(6)

Конечные импульс  $P_f$  и энергия  $E_f$  равны, соответственно

$$P_f = 8\rho V_f Rab\alpha \tag{7}$$

$$E_f = 4\rho V_f^2 Rab\alpha \tag{8}$$

Согласно закону сохранения импульса  $P_i = P_f$ , следовательно, из (5,6) получаем

$$V_f = V_i \frac{\sin \alpha}{\alpha} \tag{9}$$

Обозначим  $\Delta E = E_i - E_f$  – потерянную кинетическую энергию. Согласно (6,8,9)

$$\Delta E = 2\rho V_i^2 bR\alpha \left( R \ln \frac{R+a}{R-a} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right)$$
(10)

Предполагая  $\frac{a}{R} << 1$  из соотношения (10) получаем

$$\Delta E = 4\rho V_i^2 R b a \left( \frac{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}{\alpha} \right)$$
(11)

Для малых значений  $\alpha$  приближенно полагаем  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}$ . Тогда, согласно (11), можно положить

$$\Delta E = \frac{4}{3} \rho V_i^2 R b a \alpha^3 \tag{12}$$

Предположим, что в процессе разрушения кольца образовалось n одинаковых фрагментов ( $\alpha = \pi / n$ ), имеющих скорость  $V^+$ . В работах [1,2] было показано, что потенциальной энергией фрагмента можно пренебречь по сравнению с его кинетической энергией. Будем считать, что изменение

кинетической энергии равно работе внутренних сил. Процесс образования фрагментов скоротечный, следовательно, можно предположить, что работа внутренних сил пропорциональна их мощности. Из этих соображений, в качестве критерия оценки количества фрагментов, возьмем минимум работы внутренних сил. Это эквивалентно минимуму потерь кинетической энергии. Потери будут минимальны, когда  $V^+ = V_f$ . Тогда суммарные потери кинетической энергии  $\Delta E_s$  равны

$$\Delta E_s = n\Delta E \tag{13}$$

Примем, что работа, идущая на образование одной поверхности разрыва, равна  $\Delta H$ . Можно считать, что вся потерянная кинетическая энергия ушла на образование поверхностей разрыва. Следовательно, уравнение для определения  $\alpha$ , а значит и числа фрагментов, имеет вид

$$\Delta E = \Delta H \tag{14}$$

## 1.2. Модель фрагментации.

Для оценки  $\Delta H$  рассмотрим следующую модельную задачу разлета стержня. Рассмотрим стержень прямоугольного сечения |x| < a; |y| < b;  $-l_1 < z < l_2$ . Предположим, что в стержне задано следующее начальное распределение скоростей:  $u_x = 0$ ;  $u_y = 0$ ;  $u_z = V_{10}$  при  $-l_1 < z < 0$ ;  $u_z = V_{20}$  при  $0 < z < l_2$ . Относительно свойств материала стержня примем те же гипотезы, что и относительно свойств материала кольца.

Обозначим  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  соответствующие составляющие тензора напряжений и скоростей деформации. Из условия идеальной пластичности [5] уравнение поверхности текучести  $\Phi(\sigma_{ii}) = 0$  имеет вид

$$\frac{1}{6} \left[ \left( 2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz} \right)^2 + \left( 2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz} \right)^2 + \left( 2\sigma_{zz} - \sigma_{yy} - \sigma_{xx} \right)^2 + 18 \left( \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 \right) \right] - \sigma_s^2 = 0$$
(15)

Из закона течения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}},\tag{16}$$

согласно (15), (16), имеем

$$\varepsilon_{xx} = \omega (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}), \quad \varepsilon_{yy} = (2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz}),$$
  

$$\varepsilon_{zz} = (2\sigma_{zz} - \sigma_{yy} - \sigma_{xx}), \quad \varepsilon_{xy} = 3\omega\sigma_{xy}, \quad \varepsilon_{xz} = 3\omega\sigma_{xz}, \quad \varepsilon_{yz} = 3\omega\sigma_{yz} \quad (17)$$

Обозначим

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -3p, \qquad (18)$$

Согласно условию несжимаемости

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0, \qquad (19)$$

~

Из (17-19) имеем

$$\sigma_{xx} = -p + \frac{\varepsilon_{xx}}{3\omega}, \quad \sigma_{yy} = -p + \frac{\varepsilon_{yy}}{3\omega}, \quad \sigma_{zz} = -p + \frac{\varepsilon_{zz}}{3\omega},$$
  
$$\sigma_{xy} = \frac{\varepsilon_{xy}}{3\omega}, \quad \sigma_{xz} = \frac{\varepsilon_{xz}}{3\omega}, \quad \sigma_{yz} = \frac{\varepsilon_{xz}}{3\omega}.$$
 (20)

Используя (15,19,20), получаем

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{6\sigma_s^2}{\theta} , \qquad (21)$$

где  $\theta = \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2).$ Тогда из (20,21) следует

$$\sigma_{xx} = -p + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_s}{\sqrt{\theta}} \varepsilon_{xx}; \quad \sigma_{yy} = -p + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_s}{\sqrt{\theta}} \varepsilon_{yy}; \quad \sigma_{zz} = -p + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_s}{\sqrt{\theta}} \varepsilon_{zz}$$
$$\sigma_{xy} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_s}{\sqrt{\theta}} \varepsilon_{xy}; \quad \sigma_{xz} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_s}{\sqrt{\theta}} \varepsilon_{xz}; \quad \sigma_{yz} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_s}{\sqrt{\theta}} \varepsilon_{yz}$$
(22)

Мощность внутренних сил в единице объема  $w = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  согласно (19,22) равна

$$w = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s\sqrt{\theta} \tag{23}$$

Если имеется поверхность разрыва касательных скоростей, скачок касательной скорости на которой равен [u], то мощность внутренних сил на единицу поверхности разрыва –  $w_s$ , согласно (23) равна

$$w_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_s[u] \tag{24}$$

Поскольку материал стержня является несжимаемым, то он допускает распространение волн с бесконечной скоростью. То есть, перестройка поля скоростей может происходить мгновенно, но с соблюдением законов сохранения импульса и энергии.

Рассмотрим следующее поле скоростей (рис.1).



Рис.1. Схема поля скоростей.

B 30He I.  $u_x = 0$ ,  $u_y = 0$ ,  $u_z = V_1$ . B 30He II.  $u_x = 0$ ,  $u_y = 0$ ,  $u_z = V_2$ . В зоне III. (Равнобедренный прямоугольный треугольник OCD)  $u_x = W_x$ ,  $u_y = 0$ ,  $u_z = W_z$ .

В зоне IV. (Равнобедренный прямоугольный треугольник ОАВ)  $u_x = -W_x$ ,  $u_y = 0$ ,  $u_z = W_z$ .

Высоты треугольников ОАВ и ОСД обозначим h.

Из условия непрерывности нормальной скорости на OD и OC имеем

$$W_x \frac{\sqrt{2}}{2} + W_z \frac{\sqrt{2}}{2} = V_2 \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -W_x \frac{\sqrt{2}}{2} + W_z \frac{\sqrt{2}}{2} = V_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Следовательно

$$W_z = \frac{V_1 + V_2}{2}; \quad W_x = \frac{V_2 - V_1}{2}$$
 (25)

При t = 0 полагаем

$$V_1 = V_{10}; \quad V_2 = V_{20}; \quad h = a$$
 (26)

Разрыв касательной скорости [u] на линии OD равен

$$[u] = |V_1 - V_2| \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{27}$$

Те же значения имеет разрыв касательной скорости на линиях OC, OB, OA. Обозначим m массы треугольников OAB, OCD.

$$m = 2\rho h^2 b \tag{28}$$

Массу зон I, II обозначим  $M_1, M_2$  соответственно

$$M_{1} = 4\rho l_{1}ab - m = 2\rho b \left(2l_{1}a - h^{2}\right)$$
(29)

$$M_{2} = 4\rho l_{2}ab - m = 2\rho b (2l_{2}a - h^{2})$$
(30)

Согласно (25,28-30) импульс системы Р равен

$$P = 2mW_z + M_1V_1 + M_2V_2 = 4\rho bal_1V_1 + 4\rho bal_2V_2$$
(31)

Полная кинетическая энергия системы Е равна

$$E = m(W_x^2 + W_z^2) + \frac{1}{2}M_1V_1^2 + \frac{1}{2}M_2V_2^2$$

Согласно (25,28-30)

$$E = 2\rho bal_1 V_1^2 + 2\rho bal_2 V_2^2$$
(32)

Заметим, что принятое поле скоростей удовлетворяет закону сохранения импульса и энергии в начальный момент времени при мгновенной перестройке поля скоростей.

Скорость центра масс  $V_c$  равна

$$V_{c} = \frac{M_{1}V_{1} + M_{2}V_{2} + \rho h^{2}b(V_{1} + V_{2})}{M_{1} + M_{2} + \rho h^{2}b} = V_{1}\frac{l_{1}}{l_{1} + l_{2}} + V_{2}\frac{l_{2}}{l_{1} + l_{2}}$$
(33)

Заметим, что в силу закона сохранения импульса, скорость центра масс остается постоянной.

Обозначим  $U_1 = V_1 - V_c$ ,  $U_2 = V_2 - V_c$  скорости фрагментов относительно центра масс. Согласно (33)

$$U_{1} = \frac{l_{2}}{l_{1} + l_{2}} (V_{1} - V_{2}), \quad U_{2} = -\frac{l_{1}}{l_{1} + l_{2}} (V_{1} - V_{2})$$
(34)

Обозначим  $K_c = (M_1 + M_2 + 4\rho bh^2) \frac{V_c^2}{2}$ . Согласно (29-31)

$$K_{c} = 2\rho ba(l_{1} + l_{2}) \left( V_{1} \frac{l_{1}}{l_{1} + l_{2}} + V_{2} \frac{l_{2}}{l_{1} + l_{2}} \right)^{2}$$
(35)

Обозначим  $K_1 = 4\rho bal_1 \frac{U_1^2}{2}$ ,  $K_2 = 4\rho bal_2 \frac{U_2^2}{2}$ . Согласно (34)

$$K_{1} = 2\rho ba \frac{l_{1}l_{2}^{2}}{(l_{1}+l_{2})^{2}} (V_{1}-V_{2})^{2}, K_{2} = 2\rho ba \frac{l_{1}^{2}l_{2}}{(l_{1}+l_{2})^{2}} (V_{1}-V_{2})^{2}$$
(36)

Заметим, что  $K_c + K_1 + K_2 = E$ . Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{dE}{dt} + W = 0, \qquad (37)$$

где *W* – полная мощность внутренних сил.

В принятом поле скоростей все фрагменты движутся как жесткое тело и, следовательно, составляющие тензора скоростей деформации равны нулю, поэтому мощность внутренних сил проявляется лишь на поверхностях разрыва касательных скоростей. Полагая для определенности  $V_1 > V_2$ , используя (27), получаем

$$W = \frac{8}{\sqrt{3}}\sigma_s bh(V_1 - V_2) \tag{38}$$

Из (32,37,38) получаем

$$4\rho bal_{1}V_{1}\frac{dV_{1}}{dt} + 4\rho bal_{2}V_{2}\frac{dV_{2}}{dt} + \frac{8}{\sqrt{3}}\sigma_{s}bh(V_{1} - V_{2}) = 0$$
(39)

Из закона сохранения импульса и (31) следует

$$4\rho bal_1 \frac{dV_1}{dt} + 4\rho bal_2 \frac{dV_2}{dt} = 0$$

$$\tag{40}$$

Заметим, что

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{V_1 - V_2}{2} \tag{41}$$

Система уравнений (39-41) с начальными условиями  $V_1 = V_{10}$ ,  $V_2 = V_{20}$ , h = a при t = 0 определяет решение задачи. Согласно (40)

$$\frac{dV_2}{dt} = -\frac{l_1}{l_2}\frac{dV_1}{dt} \tag{42}$$

Подставляя (42) в (39), получаем

$$\rho a l_1 \frac{dV_1}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s h \tag{43}$$

Согласно (41)

$$2\frac{d^{2}h}{dt^{2}} = -\frac{dV_{1}}{dt} + \frac{dV_{2}}{dt}$$
(44)

Из (42-44) следует

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -\beta^2 h$$
, где  $\beta^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_s}{\rho} \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2}$  (45)

Решая (45) с начальными условиями при t = 0

$$h = a, \ \frac{dh}{dt} = -\frac{V_{10} - V_{20}}{2} \tag{46}$$

получаем

$$h = ach\beta t - \frac{V_{10} - V_{20}}{2\beta}ash\beta t$$
(47)

Величина h может принять нулевое значение (то есть – полное отделение фрагмента) в случае  $\frac{V_{10} - V_{20}}{2\beta} > a$ .

Данное соотношение эквивалентно условию

$$K_{r0} > \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s ba^2 \tag{48}$$

где  $K_{r0}$  кинетическая энергия относительно центра масс в начальный момент времени

$$K_{r0} = K_1 + K_2 = 2\rho ba \frac{l_1 l_2}{(l_1 + l_2)} (V_{10} - V_{20})^2$$

При выполнении условия (48) момент отделения фрагмента  $t = t^*$  определяется из условия  $h(t^*) = 0$ . Согласно (47), имеем

$$\exp(2\beta t^{*}) = \frac{V_{10} - V_{20} + 2\beta a}{V_{10} - V_{20} - 2\beta a}$$
(49)

Определим потери полной кинетической энергии к моменту полного отрыва фрагмента. Уравнение (37) виду приведем к виду

$$\frac{dE}{dt} = \frac{16}{\sqrt{3}}\sigma_s bh\frac{dh}{dt}$$
(50)

Интегрируя это уравнение на отрезке  $t \in [0; t^*]$  (до полного отделения фрагмента), учитывая, что h = 0 при  $t = t^*$ , получаем

$$E(t^*) - E(0) = -\frac{8}{\sqrt{3}}\sigma_s ba^2.$$
 (51)

Если исходить из условия минимума потерь кинетической энергии, то из двух возможных вариантов поля скоростей нужно выбирать такой, когда a < b. Напомним, что для двух возможных вариантов поля скоростей, принципиально можно рассматривать два случая: 1) плоская деформация относительно оси x; 2) плоская деформация относительно оси y. Критерий a < b определяет выбор нужного поля.) Потерянную кинетическую энергию будем считать затраченной на образование свободной поверхности. Тогда можно положить в соотношении (17)

$$\Delta H = \frac{8}{\sqrt{3}} \sigma_s b a^2 \tag{52}$$

Согласно (14) уравнение для определения  $\alpha$  примет вид

$$\frac{4}{3}\rho V_i^2 R b a \alpha^3 = \frac{8}{\sqrt{3}}\sigma_s b a^2 \tag{53}$$

Следовательно

$$\alpha = \left(2\sqrt{3}\frac{\sigma_s}{\rho V_i^2}\frac{a}{R}\right)^{1/3}.$$
(54)

В формуле (54) стоит a – толщина кольца, если a < b, или высота кольца b (вместо a), если a > b. Количество фрагментов оценивается соотношением

$$n = \frac{\pi}{\alpha} \tag{55}$$

Принимая во внимание, что  $\alpha = s/2R$ , где s – длина фрагмента, получаем для s выражение, совпадающее с (3).

#### выводы

В настоящей работе предложена простая модель фрагментации быстро расширяющегося кольца для случая вязкого поведения материала в условиях плоской деформации цилиндра. Показано, что для оценки среднего размера фрагмента и числа фрагментов можно использовать результаты, полученные при исследовании плоской задачи о фрагментации цилиндра [1,2].

Отличие от известных моделей Мотта и Грэди [3] состоит в том, что в настоящей работе предложен трехмерная модель (сводимая к двумерной модели) образования шейки в месте разрыва, которая базируется на известных идеях Прандтля [6], позволяющий вычислить работу разрушения на единицу длины цилиндра.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1. *Goloveshkin V.A., Myagkov N.N.* Fragmentation model for expanding cylinder // Intern. J. of Fracture. 2014. Vol.187. N2. P.239-243.
- Головешкин В.А., Мягков Н.Н. Модель фрагментации расширяющегося цилиндра // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №1. – С.97-103.
- 3. Grady D.E. Fragmentation of Rings and Shells. Berlin: Springer, 2006.
- Kipp M.E., Grady D.E. Dynamic fracture growth and interaction in one dimension // J. Mech. Phys. Solids. – 1985. – Vol.33. – P.399-415.
- 5. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

Поступила в редакцию 28 июля 2015 года.

Сведения об авторах:

Головешкин Василий Адамович – д.т.н., проф., Кафедра ИТ-1, Московский государственный университет приборостроения и информатики, г. Москва, Россия; e-mail: <u>nikshevolog@yandex.ru</u>

Мягков Николай Николаевич – д.ф.-м.н., проф., зав.лаб., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: <u>nn myagkov@mail.ru</u>

Пономарев А.В. – к.т.н., доц., Московский государственный университет информационных технологий, радиотехники и электроники, г. Москва, Россия