

УТОЧНЕНИЕ ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ГРАНИЦ ЭФФЕКТИВНЫХ ЖЕСТКОСТЕЙ РЕБРИСТО-АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТНЫХ СРЕД¹

Янковский А.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А.Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

РЕЗЮМЕ

Предложены две уточненные структурные модели термоупругого поведения ребристо-армированной композитной среды при общей анизотропии материалов компонентов композиции. В качестве критериев эквивалентности ребристо-армированной композиции фиктивному однородному анизотропному материалу использованы равенства в них удельной свободной энергии и удельной термодинамической энергии Гиббса, что позволяет определить верхнюю и нижнюю границы эффективных жесткостей композитного материала. Проведена верификация этих моделей путем сравнения эффективных упругих постоянных пенопластмассовой среды, армированной в виде сотовых ячеек, с результатами эталонных расчетов, выполненных на основе конечно-элементного моделирования, а также путем сравнения аналогичных величин для легкого сотового заполнителя с результатами натурального эксперимента. Показано, что уточненные нижние оценки эффективных жесткостей лучше согласуются с экспериментальными данными и эталонными расчетами, чем расчетные значения этих же величин, определенные на базе других структурных моделей.

Ключевые слова: композиты; ребристое армирование; структурная теория; общая анизотропия; энергетическая эквивалентность; эффективные характеристики; легкий заполнитель; ребристые конструкции; термоупругость

REFINEMENT OF THE UPPER AND LOWER BOUNDS OF THE EFFECTIVE RIGIDITY OF THE RIB-REINFORCED COMPOSITE MEDIA

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch
of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia*

SUMMARY

Two refined structural model proposed for the thermo-elastic behavior of the rib-reinforced composite medium with the total anisotropy of the material components of the composition. As criteria of equivalence of the rib-reinforced compositions to fictitious homogeneous anisotropic material the equality of specific free energy and specific thermodynamic Gibbs energy in them are used. This allows determining upper and lower bounds of the effective stiffness of the composite material. Verification of the model is carried

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00102-а).

out by comparing the effective elastic constants of the foam plastic medium reinforced in the form of honeycomb cell with the results of the standard calculations performed on the basis of the finite-element modeling and also by comparing similar values for lightweight honeycomb filler with the results of the experiment. It was shown that refined lower bounds of effective rigidities better agreed with the experimental data and with reference calculations than the calculated values of the same values that are defined on the basis of other structural models.

Key words: composites; ribbed reinforcement; structural theory; General anisotropy; energy equivalence; effective characteristics; lightweight aggregate; ribbed design; thermo-elasticity

ВВЕДЕНИЕ

В современных элементах конструкций аэрокосмического назначения широко используются сэндвич-панели с заполнителями, изготовленными из армированных и неармированных пенопластмасс [1], а также из ребристых конструкций типа гофра, сотовых, складчатых и др. [2 и др.].

В силу актуальности использования сэндвич-панелей в инженерной практике на протяжении нескольких последних десятилетий многие авторы обращались к проблеме как экспериментального, так и теоретического определения эффективных характеристик заполнителей, представляющих собой указанные ребристо-пространственные конструкции [2,3 и др.], анализ которых содержится в [4].

Однако и в настоящее время интерес к проблеме деформирования ребристых конструкций не ослабевает. Так, в [5] исследуются чисто геометрические особенности деформирования (формоизменения) сотовой панели, а в [3,6] изучается проблема потери устойчивости и закритического поведения ее элементов.

Современные технологии позволяют создавать такие типы заполнителей, в которых полости в ребристой конструкции заполнены пенопластмассой [7], что позволяет улучшить вибрационные характеристики заполнителя за счет высоких демпфирующих свойств пенопластической массы [1]. Кроме того, пенопластмасса способствует улучшению совместной работы элементов такой конструкции и оказывает сопротивление их потере устойчивости, что существенно сказывается на жесткостных характеристиках ребристых заполнителей [3,7,8 и др.].

Подобные конструкции заполнителей можно рассматривать как композитные среды со сложными криволинейными ребристыми структурами армирования. Моделирование их механического поведения в настоящее время находится в зачаточном состоянии. Так, в [7] на основе конечно-элементного моделирования (КЭМ) изучается упругопластическое поведение трехслойных удлиненных пластин при цилиндрическом изгибе, когда средний слой представляет собой ребристо-армированный полимер. Конечно-элементное решение наиболее предпочтительно при исследовании подобных проблем, однако современный уровень вычислительной техники не позволяет рассчитать механическое поведение такой конструкции при большом количестве ячеек заполнителя. Например, в [7] изучение поведения конструкции сведено к рассмотрению представительного элемента балочного типа, содержащему всего 10 ячеек заполнителя; аналогично и в [6] для изучения на основе КЭМ закритического поведения сотового заполнителя из него выделяется

представительный элемент, содержащий порядка 10 сотовых ячеек. В реальных же заполнителях сэндвич-панелей характерный размер одной ячейки может иметь порядок 1 см [8], поэтому тонкостенный трехслойный элемент конструкции, содержащий всего 10 ячеек заполнителя, малоинтересен с инженерной точки зрения.

Как альтернатива для решения реальных задач о механическом поведении конструкций периодической структуры, содержащих большое количество ячеек, целесообразно использовать структурные модели, основанные на применении тех или иных упрощающих гипотез. Так, в работах [9-11] на основе упрощающих допущений были разработаны три модели, позволяющие определять эффективные жесткости композитной среды, криволинейно-армированной ребристыми элементами, причем в [9,10] на основе энергетических критериев эквивалентности были получены нижние [9] и верхние [10] оценки этих величин («вилка Винера» [12]). Однако дальнейшие исследования показали [13], что в [9-11] вместо криволинейных структур ребристого армирования (например, в виде соты; рис.1) были смоделированы ячейки с прямолинейным армированием (например, как изображено на рис.2 вместо соты). Это приводит к неоправданно большому завышению значений некоторых эффективных жесткостей ребристо-армированной композитной среды [13]. Поэтому в [13] была предложена новая модель, учитывающая криволинейность армирующих элементов (см.рис.1) и уточняющая структурные соотношения из [11].

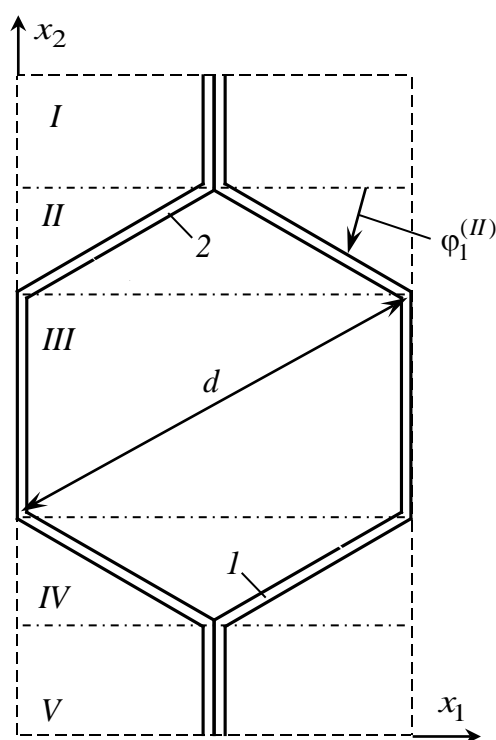


Рис.1. Представительный элемент сотовой ячейки.

Так как оценка верхней и нижней границ эффективных характеристик армированных сред является важной проблемой механики композитов [14,15], то настоящее исследование посвящено уточнению верхней и нижней границ эффективных жесткостей ребристо-армированных композитных сред.

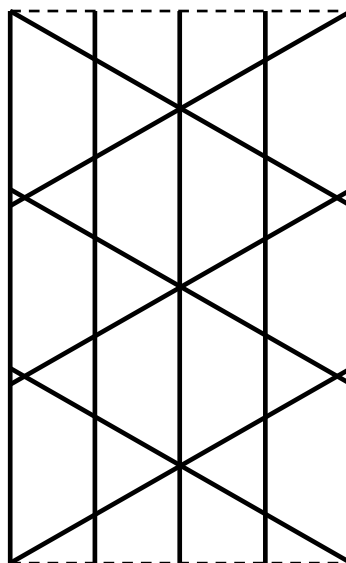


Рис.2. Ячейка, смоделированная в [9-11] вместо сотовой.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ ЭФФЕКТИВНЫХ ЖЕСТКОСТЕЙ РЕБРИСТО-АРМИРОВАННОГО КОМПОЗИТА

Как и в [9-11,13], рассмотрим термоупругий слой толщиной h , периодически армированный в плоскости (x_1, x_2) ребристыми элементами, представляющими собой криволинейные цилиндрические оболочечные элементы, образующие которых параллельны координате x_3 прямоугольной декартовой системы координат. Координата x_3 направлена по толщине слоя. Выделим из такого композита простейшую репрезентативную ячейку с размерами $a \times b \times h$.

На рис.3 изображена представительная ячейка с достаточно общим типом армирования, из которой, меняя геометрию армирующих элементов, можно получить ребристые конструкции многих видов, используемых в инженерной практике [2,4,16 и др.]: сотовые (рис.1), складчатые, типа гофра и др. Представительная ячейка на рис.3 усилена четырьмя армирующими элементами, два из которых криволинейные (1 и 2) и два – плоские (3 и 4). Сотовая же ячейка на рис.1 усилена двумя кусочно-плоскими армирующими элементами 1 и 2.

С каждым k -м ($1 \leq k \leq K$) армирующим элементом свяжем локальную прямоугольную систему координат $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} \equiv x_3$ (как показано на рис.3), которая получается поворотом глобальной системы координат x_1, x_2, x_3 на угол $\varphi_k(\zeta)$ вокруг вертикальной оси x_3 , причем на рис.3 $\varphi_3 \equiv \varphi_4 \equiv \pi/2$, а φ_1 и φ_2 являются функциями естественной координаты ζ , откладываемой вдоль направляющих линий криволинейных элементов 1 и 2 (оси $x_1^{(k)}$ являются касательными к направляющим линиям, а оси $x_2^{(k)}$ перпендикулярны этим линиям).

Усиливающие элементы ячейки могут быть изготовлены из армированных полимеров [16], поэтому в общем случае все компоненты композиции предполагаются анизотропными материалами, причем определяющие соотношения для материала связующего (пенопластмассы) задаются в глобальной

системе координат x_i , а k -го армирующего элемента – в локальной системе $x_i^{(k)}$. Эффективные характеристики композиции определяются также в глобальной системе x_i ($i=1, 2, 3$).

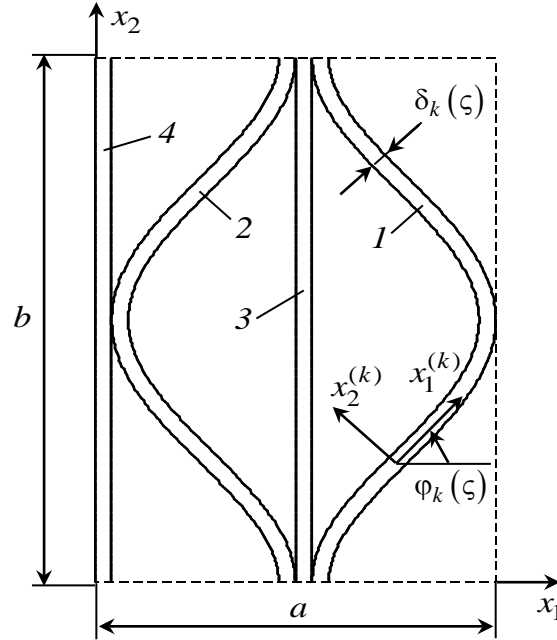


Рис.3. Представительный элемент (ячейка общего вида) композита, армированного пространственной ребристой конструкцией (вид сверху).

Согласно вышеизложенному, определяющие уравнения для фиктивного материала, эквивалентного композитной среде, и для материалов фаз композиции в матричной форме имеют вид [17,18]

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{B}\mathbf{T} = \partial F / \partial \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = A_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{B}_0 T_0 = \partial F_0 / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad (2)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k = \bar{A}_k \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k - \bar{\mathbf{B}}_k T_k = \partial F_k / \partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^* &= \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}\}, \\ \mathbf{B}^* &= \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} = \{b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{12}, b_{23}, b_{31}\}, \\ \boldsymbol{\sigma}_0^* &= \{\sigma_1^{(0)}, \sigma_2^{(0)}, \sigma_3^{(0)}, \sigma_4^{(0)}, \sigma_5^{(0)}, \sigma_6^{(0)}\} = \{\sigma_{11}^{(0)}, \sigma_{22}^{(0)}, \sigma_{33}^{(0)}, \sigma_{12}^{(0)}, \sigma_{23}^{(0)}, \sigma_{31}^{(0)}\}, \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^* &= \{\bar{\sigma}_1^{(k)}, \bar{\sigma}_2^{(k)}, \bar{\sigma}_3^{(k)}, \bar{\sigma}_4^{(k)}, \bar{\sigma}_5^{(k)}, \bar{\sigma}_6^{(k)}\} = \{\bar{\sigma}_{11}^{(k)}, \bar{\sigma}_{22}^{(k)}, \bar{\sigma}_{33}^{(k)}, \bar{\sigma}_{12}^{(k)}, \bar{\sigma}_{23}^{(k)}, \bar{\sigma}_{31}^{(k)}\} \end{aligned} \quad (3)$$

и т.д.

$\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}_0$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k$ – шестикомпонентные вектор-столбцы напряжений в эквивалентном материале, связующем и k -м армирующем элементе ячейки композита; $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ – шестикомпонентные вектор-столбцы деформаций в тех же материалах (здесь, в отличие от [13], для удобства изложения под $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ и т.п. понимаются полные сдвиговые деформации, равные соответствующим удвоенным компонентам тензоров деформаций $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}$ и т.п.); $A = (a_{ij})$, $A_0 = (a_{ij}^{(0)})$, $\bar{A}_k = (\bar{a}_{ij}^{(k)})$

$(i, j = \overline{1, 6})$ – симметричные 6×6 -матрицы упругих жесткостей тех же материалов; $\mathbf{B} = \{b_i\}$, $\mathbf{B}_0 = \{b_i^{(0)}\}$, $\overline{\mathbf{B}}_k = \{\overline{b}_i^{(k)}\}$ ($i = \overline{1, 6}$) – шестикомпонентные вектор-столбцы температурных жесткостей тех же материалов; T , T_0 , T_k – отклонение температуры фиктивного материала, связующего и k -го армирующего элемента от температуры естественного состояния θ ; F , F_0 , F_k – удельные свободные энергии Гельмгольца (инварианты) в тех же материалах, имеющие выражения [17]

$$\begin{aligned} F &= \boldsymbol{\varepsilon}^* \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} / 2 - \boldsymbol{\varepsilon}^* \mathbf{B} T - c^\varepsilon T^2 / (2\theta), \\ F_0 &= \boldsymbol{\varepsilon}_0^* \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0 / 2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0^* \mathbf{B}_0 T_0 - c_0^\varepsilon T_0^2 / (2\theta), \\ F_k &= \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^* \overline{\mathbf{A}}_k \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_k / 2 - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^* \overline{\mathbf{B}}_k T_k - c_k^\varepsilon T_k^2 / (2\theta), \quad 1 \leq k \leq K \end{aligned} \quad (4)$$

c^ε , c_0^ε , c_k^ε – теплоемкости (при постоянной деформации) фиктивного материала, связующего и армирующего элемента k -го семейства; K – количество армирующих элементов в представительной ячейке (например, на рис.1 $K = 2$, а на рис.3 $K = 4$); звездочка означает операцию транспонирования.

В соотношениях (1)-(4) и далее чертой сверху обозначены величины, определенные в локальной системе координат $x_i^{(k)}$, связанной с k -м армирующим элементом, а те же величины, определенные в глобальной системе x_i ($i = 1, 2, 3$), обозначены теми же символами, но без черты. (Согласно этому, первое соотношение (2) и равенство (1) записаны в глобальной системе координат, а второе соотношение (2) – в локальной k -й системе координат, как и было оговорено выше.) Равенства (3) задают соответствия между шестью компонентами f_i , $f_i^{(0)}$, $\overline{f}_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, 6}$) некоторых векторов \mathbf{f} , \mathbf{f}_0 , $\overline{\mathbf{f}}_k$ и компонентами соответствующих симметричных тензоров второго ранга f_{ij} , $f_{ij}^{(0)}$, $\overline{f}_{ij}^{(k)}$ ($i, j = 1, 2, 3; 1 \leq k \leq K$).

Так как установить фактическое распределение напряжений и деформаций в композите, где основной материал (пенопластмасса) имеет многочисленные более жесткие включения сложной формы, весьма затруднительно [18] (разве что, непосредственно используя КЭМ [7,19]), то для нахождения практически пригодных зависимостей, определяющих все независимые термоупругие постоянных рассматриваемого композита, как и в [9-11,13], необходимо сделать некоторые допущения в виде исходных предпосылок.

1. Количество представительных ячеек во всех направлениях x_i достаточно велико, что позволяет рассматривать эквивалентный композиту материал как квазиоднородный и анизотропный с определяющими соотношениями (1).
2. Плоскостями, параллельными отсчетной плоскости (x_1, x_3), представительную ячейку можно разбить на субэлементы, в пределах каждого из которых армирующие элементы приближенно можно считать плоскими. (На рис.1 ячейка с армированием в виде соты разбита на пять субэлементов I-V.)
3. Между связующим (пенопластмассой) и каждым армирующим элементом существует полное термомеханическое сцепление.
4. В пределах каждого субэлемента ячейки деформации, напряжения и температуры во всех компонентах и в композиции кусочно-постоянны. Эффектами высших порядков, связанными с изменением полей деформаций,

напряжений и температур в малых окрестностях границ контакта связующего и армирующих элементов, пренебрегаем.

5. Осредненные поля деформаций и температуры в композиции каждого субэлемента определяются по правилу простой смеси – пропорционально объемному содержанию каждого компонента.
6. Осредненные поля деформаций и температуры в представительной ячейке определяются по правилу простой смеси – пропорционально объемному содержанию каждого субэлемента.
7. Все фазовые материалы линейно-термоупруги, анизотропны и однородны; связь между напряжениями, деформациями и температурой в них задается определяющими уравнениями (2).
8. В качестве условия эквивалентности выступает равенство свободной энергии фиктивного однородного анизотропного материала свободной энергии рассматриваемого композита: а) в пределах каждого субэлемента; б) для всей представительной ячейки, как состоящей из субэлементов.

Замечание^о1. Отличие допущений 1-8 от гипотез, использованных в [10], заключается в том, что в [10] ячейка не разбивалась на субэлементы. В работе же [13] допущение 8 вообще не использовалось, а гипотезы 5, 6 были дополнены следующим предположением: осредненное поле напряжений, как в пределах каждого субэлемента, так и для всей ячейки в целом также определяется по правилу простой смеси. Именно использование допущений 5, 6, 8 позволяет оценить верхние границы эффективных жесткостей рассматриваемой композитной среды [14,20].

Так как допущения 3-5, 7, 8а применительно к субэлементу полностью совпадают с гипотезами, использованными в [10], то, повторяя рассуждения из [10], на основании соотношений (2), (4) для l -го субэлемента ячейки получим матричное соотношение, аналогичное (1)

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_l = \langle \mathbf{A} \rangle_l \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l - \langle \mathbf{B} \rangle_l \langle T \rangle_l, \quad 1 \leq l \leq L, \quad (5)$$

где $\langle \mathbf{A} \rangle_l = (\langle a_{ij}^{(l)} \rangle)$ – симметричная 6×6 -матрица, $\langle \mathbf{B} \rangle_l = \{ \langle b_i^{(l)} \rangle \}$ ($i, j = \overline{1, 6}$) – шестикомпонентный вектор-столбец, определяемые так

$$\langle \mathbf{A} \rangle_l = E_l^* \left(\omega_0^{(l)} A_0 + \sum_k \omega_k^{(l)} R_k^{(l)*} \bar{A}_k R_k^{(l)} \right) E_l, \quad (6)$$

$$\langle \mathbf{B} \rangle_l = E_l^* \left[\omega_0^{(l)} (\mathbf{B}_0 + A_0 \mathbf{G}_l) + \sum_k \omega_k^{(l)} R_k^{(l)*} (\bar{\mathbf{B}}_k + \bar{A}_k (R_k^{(l)} \mathbf{G}_l - \mathbf{Q}_k^{(l)})) \right]$$

$$E_l = \left(\omega_0^{(l)} I + \sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} R_k^{(l)} \right)^{-1}, \quad \mathbf{G}_l = E_l \left(\sum_k \omega_k^{(l)} D_k^{(l)} \mathbf{Q}_k^{(l)} \right), \quad (7)$$

$$R_k^{(l)} = (F_k^{(l)})^{-1} H_k^{(l)}, \quad \mathbf{Q}_k^{(l)} = (F_k^{(l)})^{-1} \mathbf{S}_k^{(l)} \quad (1 \leq k \leq K, 1 \leq l \leq L)$$

I – единичная 6×6 -матрица; $(F_k^{(l)})^{-1}$ – 6×6 -матрица, обратная $F_k^{(l)}$. Ненулевые элементы 6×6 -матриц $F_k^{(l)} = (F_{ij}^{(l,k)})$, $H_k^{(l)} = (H_{ij}^{(l,k)})$, $D_k^{(l)} = (d_{ij}^{(l,k)})$ и шестикомпонентных вектор-столбцов $\mathbf{S}_k^{(l)} = \{ S_i^{(l,k)} \}$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 d_{11}^{(l,k)} &= d_{22}^{(l,k)} = \cos^2 \varphi_k^{(l)}, & d_{12}^{(l,k)} &= d_{21}^{(l,k)} = \sin^2 \varphi_k^{(l)}, & d_{14}^{(l,k)} &= -d_{24}^{(l,k)} = \\
 &= -0,5 \sin 2\varphi_k^{(l)}, & d_{33}^{(l,k)} &= 1, & d_{41}^{(l,k)} &= -d_{42}^{(l,k)} = \sin 2\varphi_k^{(l)}, & d_{44}^{(l,k)} &= \cos 2\varphi_k^{(l)}, \\
 d_{55}^{(l,k)} &= d_{66}^{(l,k)} = \cos \varphi_k^{(l)}, & d_{56}^{(l,k)} &= -d_{65}^{(l,k)} = \sin \varphi_k^{(l)}, & F_{11}^{(l,k)} &= F_{33}^{(l,k)} = \\
 &= F_{66}^{(l,k)} = 1, & F_{2j}^{(l,k)} &= \bar{a}_{2j}^{(k)}, & F_{4j}^{(l,k)} &= \bar{a}_{4j}^{(k)}, & F_{5j}^{(l,k)} &= \bar{a}_{5j}^{(k)}, & H_{11}^{(l,k)} &= \cos^2 \varphi_k^{(l)}, \\
 H_{12}^{(l,k)} &= \sin^2 \varphi_k^{(l)}, & H_{14}^{(l,k)} &= 0,5 \sin 2\varphi_k^{(l)}, & H_{2j}^{(l,k)} &= a_{1j}^{(0)} \sin^2 \varphi_k^{(l)} + \\
 &+ a_{2j}^{(0)} \cos^2 \varphi_k^{(l)} - a_{4j}^{(0)} \sin 2\varphi_k^{(l)}, & H_{33}^{(l,k)} &= 1, & H_{4j}^{(l,k)} &= 0,5 \sin 2\varphi_k^{(l)} (a_{2j}^{(0)} - a_{1j}^{(0)}) + \\
 &+ a_{4j}^{(0)} \cos 2\varphi_k^{(l)}, & H_{5j}^{(l,k)} &= -a_{6j}^{(0)} \sin \varphi_k^{(l)} + a_{5j}^{(0)} \cos \varphi_k^{(l)} \quad (j = \overline{1, 6}), \\
 H_{66}^{(l,k)} &= \cos \varphi_k^{(l)}, & H_{65}^{(l,k)} &= \sin \varphi_k^{(l)}, & S_2^{(l,k)} &= \bar{b}_2^{(k)} - b_1^{(0)} \sin^2 \varphi_k^{(l)} - \\
 &- b_2^{(0)} \cos^2 \varphi_k^{(l)} + b_4^{(0)} \sin 2\varphi_k^{(l)}, & S_4^{(l,k)} &= \bar{b}_4^{(k)} - 0,5 (b_2^{(0)} - b_1^{(0)}) \sin 2\varphi_k^{(l)} - \\
 &- b_4^{(0)} \cos 2\varphi_k^{(l)}, & S_5^{(l,k)} &= \bar{b}_5^{(k)} + b_6^{(0)} \sin \varphi_k^{(l)} - b_5^{(0)} \cos \varphi_k^{(l)}, & 1 \leq k \leq K, & 1 \leq l \leq L
 \end{aligned} \tag{8}$$

В равенствах (5)-(8) использованы следующие обозначения: $\langle \sigma \rangle_l$, $\langle \epsilon \rangle_l$ – шестикомпонентные вектор-столбцы осредненных напряжений и деформаций композиции в пределах l -го субэлемента; $\langle T \rangle_l$ – отклонение осредненной температуры композиции в пределах l -го субэлемента от температуры естественного состояния θ ; $\langle A \rangle_l$ – матрица осредненных жесткостей композиции в пределах l -го субэлемента; $\langle \mathbf{B} \rangle_l$ – шестикомпонентный вектор осредненных температурных жесткостей в пределах l -го субэлемента; $\omega_0^{(l)}$, $\omega_k^{(l)}$ – относительное объемное содержание связующего и армирующего элемента k -го семейства в l -м субэлементе ячейки, причем выполняются условия нормировки

$$\omega_0^{(l)} + \sum_k \omega_k^{(l)} = 1, \quad l = 1, 2, \dots, L; \tag{9}$$

L – количество субэлементов в ячейке (на рис.1 изображен случай с $L = 5$); $\varphi_k^{(l)}$ – значение угла φ_k в l -м субэлементе ячейки (см. рис.1), которое, согласно допущению 2, постоянно в пределах этого субэлемента ($\varphi_k^{(l)} = \text{const}$); суммирование по индексу « k » производится от 1 до K .

В процессе вывода соотношений (5)-(7) с учетом (4), (9) получают дополнительные равенства

$$T_k^{(l)} = \langle T \rangle_l \quad (0 \leq k \leq K, 1 \leq l \leq L) \tag{10}$$

$$\epsilon_0^{(l)} = E_l \langle \epsilon \rangle_l - \mathbf{G}_l \langle T \rangle_l, \quad 1 \leq l \leq L \tag{11}$$

$$\bar{\epsilon}_k^{(l)} = R_k^{(l)} \epsilon_0^{(l)} + \mathbf{Q}_k^{(l)} \langle T \rangle_l, \quad 1 \leq k \leq K, 1 \leq l \leq L \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 \theta^{-1} \langle c^\epsilon \rangle_l &= \omega_0^{(l)} [\theta^{-1} c_0^\epsilon - \mathbf{G}_l^* (2\mathbf{B}_0 + A_0 \mathbf{G}_l)] + \sum_k \omega_k^{(l)} [\theta^{-1} c_k^\epsilon - \\
 &- \mathbf{G}_l^* R_k^{(l)*} (\bar{A}_k (R_k^{(l)} \mathbf{G}_l - 2\mathbf{Q}_k^{(l)}) + 2\bar{\mathbf{B}}_k) + \mathbf{Q}_k^{(l)*} (2\bar{\mathbf{B}}_k - \bar{A}_k \mathbf{Q}_k^{(l)})], \quad 1 \leq l \leq L
 \end{aligned} \tag{13}$$

Равенство (10) означает, что осредненная температура композиции $\langle T \rangle_l$ в пределах l -го субэлемента ячейки равна температуре материала каждой фазы композиции $T_k^{(l)}$ (см. (2)). Соотношение (11) определяет деформации связующего $\epsilon_0^{(l)}$ через осредненные деформации $\langle \epsilon \rangle_l$ и температуру $\langle T \rangle_l$ композиции в пределах l -го субэлемента ячейки. Равенство (12) определяет деформации k -го

армирующего элемента $\bar{\epsilon}_k^{(l)}$ (в локальной системе координат $x_i^{(k)}$) через осредненную температуру $\langle T \rangle_l$ и деформации связующего $\epsilon_0^{(l)}$ (заданные в глобальной системе координат x_i) в пределах l -го субэлемента ячейки. Равенство же (13) позволяет вычислить среднюю теплоемкость (при постоянстве деформации) композиции $\langle c^\epsilon \rangle_l$ в пределах l -го субэлемента ячейки.

Таким образом, равенство (5) с учетом (6)-(8) задает в матричной форме определяющие соотношения для материала, эквивалентного композиту в пределах l -го субэлемента, которые формально совпадают с соотношениями Дюамеля-Неймана для анизотропного материала.

Согласно допущению 1, l -й субэлемент ячейки с термомеханическими характеристиками (6) регулярно повторяется во всех направлениях x_i ($i = 1, 2, 3$), поэтому исследуемую композитную среду можно заменить эквивалентной ей слоистой средой с регулярно чередующимися анизотропными слоями (рис.4), термоупругие характеристики которых определяются выражениями (6).

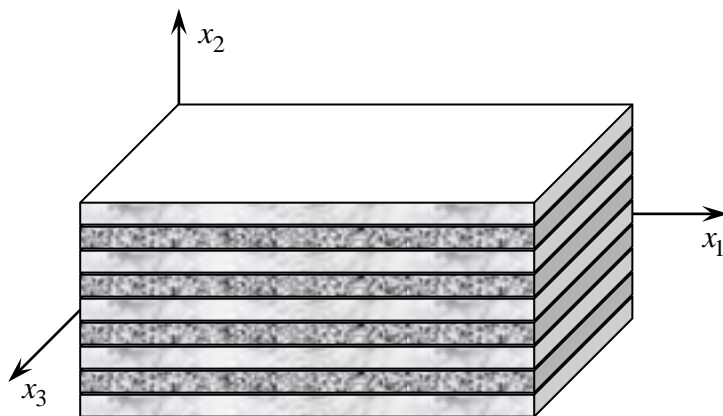


Рис.4. Слоистый материал регулярной структуры, эквивалентный рассматриваемой композитной среде.

Как уже отмечалось, заданием геометрии армирующих элементов (см.рис.3) можно получить ячейки разных типов, в том числе и состоящие из параллельно уложенных слоев материалов фаз композиции (рис.4), поэтому на основании допущений 1-8 можно получить определяющие соотношения для рассматриваемого композита. Для этого нужно ввести дополнительные гипотезы, аналогичные использованным выше.

9. Между регулярно чередующимися анизотропными слоями, эффективные термоупругие характеристики которых определяются характеристиками субэлементов ячейки, существует полное термомеханическое сцепление (см.рис.4).
10. В пределах каждого представительного элемента, выделенного из слоистой среды, деформации, напряжения и температуры во всех слоях и в композиции кусочно-постоянны.
11. Материалы слоев рассматриваются как линейно-термоупругие, анизотропные и однородные; связь между напряжениями, деформациями и температурой в них определяется соотношениями Дюамеля-Неймана (5).

Так как допущения 9, 10, 6, 11, 8б аналогичны гипотезам 3, 4, 5, 7, 8а, соответственно, то, вновь повторяя рассуждения из [10], окончательно получим определяющие соотношения для рассматриваемой композитной среды (при этом, согласно рис.4, в соотношениях, аналогичных (8), необходимо «углы армирования» φ_l приравнять нулю) в виде (1), где матрица A и вектор \mathbf{B} определяются матричными равенствами

$$A = E^* \left(\Omega_1 \langle A \rangle_1 + \sum_{l=2}^L \Omega_l R_l^* \langle A \rangle_l R_l \right) E, \quad (14)$$

$$\mathbf{B} = E^* \left[\Omega_1 (\langle \mathbf{B} \rangle_1 + \langle A \rangle_1 \mathbf{G}) + \sum_{l=2}^L \Omega_l R_l^* (\langle \mathbf{B} \rangle_l + \langle A \rangle_l (R_l \mathbf{G} - \mathbf{Q}_l)) \right]$$

$$E = \left(\Omega_1 I + \sum_{l=2}^L \Omega_l R_l \right)^{-1}, \quad \mathbf{G} = E \sum_{l=2}^L \Omega_l \mathbf{Q}_l, \quad (15)$$

$$R_l = F_l^{-1} H, \quad \mathbf{Q}_l = F_l^{-1} \mathbf{S}_l \quad (2 \leq l \leq L)$$

F_l^{-1} – 6×6 -матрица, обратная F_l . Ненулевые элементы 6×6 -матриц $F_l = (F_{ij}^{(l)})$, $H = (H_{ij})$ и шестикомпонентных вектор-столбцов $\mathbf{S}_l = \{S_i^{(l)}\}$ вычисляются по формулам

$$F_{11}^{(l)} = F_{33}^{(l)} = F_{66}^{(l)} = 1, \quad F_{2j}^{(l)} = \langle a_{2j}^{(l)} \rangle, \quad F_{4j}^{(l)} = \langle a_{4j}^{(l)} \rangle, \quad F_{5j}^{(l)} = \langle a_{5j}^{(l)} \rangle,$$

$$H_{11} = H_{33} = H_{66} = 1, \quad H_{2j} = \langle a_{2j}^{(1)} \rangle, \quad H_{4j} = \langle a_{4j}^{(1)} \rangle, \quad H_{5j} = \langle a_{5j}^{(1)} \rangle \quad (j = \overline{1, 6}), \quad (16)$$

$$S_2^{(l)} = \langle b_2^{(l)} \rangle - \langle b_2^{(1)} \rangle, \quad S_4^{(l)} = \langle b_4^{(l)} \rangle - \langle b_4^{(1)} \rangle, \quad S_5^{(l)} = \langle b_5^{(l)} \rangle - \langle b_5^{(1)} \rangle, \quad 2 \leq l \leq L$$

$\langle a_{ij}^{(l)} \rangle$, $\langle b_i^{(l)} \rangle$ – компоненты матрицы $\langle A \rangle_l$ и вектора $\langle \mathbf{B} \rangle_l$ соответственно (см. (5), (6)); Ω_l – относительное объемное содержание l -го субэлемента в ячейке, причем выполняется условие нормировки

$$\sum_{l=1}^L \Omega_l = 1. \quad (17)$$

В процессе вывода соотношений (14), (15) с учетом (17) получаются дополнительные равенства

$$\langle T \rangle_l = T \quad (1 \leq l \leq L) \quad (18)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1 = E \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{G} T \quad (19)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l = R_l \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1 + \mathbf{Q}_l T \quad (2 \leq l \leq L) \quad (20)$$

$$\frac{c^\varepsilon}{\theta} = \Omega_1 \left[\theta^{-1} \langle c^\varepsilon \rangle_1 - \mathbf{G}^* (2 \langle \mathbf{B} \rangle_1 + \langle A \rangle_1 \mathbf{G}) \right] + \sum_{l=2}^L \Omega_l \left[\theta^{-1} \langle c^\varepsilon \rangle_l - \mathbf{G}^* R_l^* (\langle A \rangle_l (R_l \mathbf{G} - 2 \mathbf{Q}_l) + 2 \langle \mathbf{B} \rangle_l) + \mathbf{Q}_l^* (2 \langle \mathbf{B} \rangle_l - \langle A \rangle_l \mathbf{Q}_l) \right] \quad (21)$$

Равенство (18) означает, что средняя в l -м субэlemente температура $\langle T \rangle_l$ равна средней температуре в ячейке T . Соотношение (19) определяет осредненные деформации в первом субэlemente $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1$ через осредненную температуру T и осредненные деформации ячейки $\boldsymbol{\varepsilon}$. Равенство (20) определяет осредненные деформации l -го субэlementa $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l$ ($2 \leq l \leq L$) через осредненную температуру ячейки T и осредненные деформации в первом субэlemente $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1$. Соотношение

(21) позволяет вычислить теплоемкость (при постоянстве деформаций) ячейки c^ε через аналогичные величины $\langle c^\varepsilon \rangle_l$, определенные ранее для всех субэлементов.

Таким образом, согласно допущению 1, равенство (1) с учетом (14)-(16) задает в матричной форме определяющие соотношения для фиктивного материала, эквивалентного рассматриваемой композитной среде, которые формально совпадают с соотношениями Дюамеля-Неймана для анизотропного однородного материала.

Важной особенностью предложенной модели рассматриваемого композита является возможность определения напряжений $\sigma_0^{(l)}$, $\bar{\sigma}_k^{(l)}$ и деформаций $\varepsilon_0^{(l)}$, $\bar{\varepsilon}_k^{(l)}$ ($1 \leq k \leq K$, $1 \leq l \leq L$) в каждом компоненте композиции по известным осредненным деформациям ε и температуре T . Действительно, пусть известны деформации ε и температура T , тогда из (18)-(20) известны $\langle T \rangle_l$, $\langle \varepsilon \rangle_l$ ($1 \leq l \leq L$), а из (10)-(12) известны $T_0^{(l)}$, $\varepsilon_0^{(l)}$, $T_k^{(l)}$, $\bar{\varepsilon}_k^{(l)}$, после чего из (2) можно определить $\sigma_0^{(l)}$, $\bar{\sigma}_k^{(l)}$. Знание напряжений $\sigma_0^{(l)}$, $\bar{\sigma}_k^{(l)}$ ($1 \leq k \leq K$, $1 \leq l \leq L$) имеет принципиальное значение при использовании в дальнейшем структурных теорий прочности или изучении возможности потери устойчивости армирующими элементами ячейки [3,6,7].

Замечание^о2. Если в рамках построенной модели для связующего (пенопластмассы) осуществить предельные переходы $a_{ij}^{(0)} \rightarrow 0$, $b_i^{(0)} \rightarrow 0$ (см. (2), (3)), то по изложенной выше методике получим определяющие соотношения (1) для ребристой конструкции (типа сотовой, складчатой, гофра и т.п.), пустоты в которых не заполнены пенопластмассой.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ЭФФЕКТИВНЫХ ЖЕСТКОСТЕЙ РЕБРИСТО-АРМИРОВАННОГО КОМПОЗИТА

Для получения нижней границы эффективных жесткостей ребристо-армированной композитной среды вновь воспользуемся допущениями 1-4, 7, а вместо гипотез 5, 6, 8 используем следующие предположения:

- 5'. Осредненные поля напряжений и температуры в композиции каждого субэлемента определяются по правилу простой смеси – пропорционально объемному содержанию каждого компонента.
- 6'. Осредненные поля напряжений и температуры в представительной ячейке определяются по правилу простой смеси – пропорционально объемному содержанию каждого субэлемента.
- 8'. В качестве условия эквивалентности выступает равенство термодинамической энергии Гиббса (потенциала Гиббса) фиктивного однородного анизотропного материала термодинамической энергии Гиббса рассматриваемого композита: а) в пределах каждого субэлемента; б) для всей представительной ячейки, как состоящей из субэлементов.

Замечание 3. Именно использование допущений 5', 6', 8' позволяет оценить нижние границы эффективных жесткостей рассматриваемой композитной среды [14,20].

В силу допущений 1, 7 соотношения Дюамеля-Неймана (1), (2) можно записать в виде [17,18]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = C\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha}T = -\partial\tilde{G} / \partial\boldsymbol{\sigma} \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = C_0\boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\alpha}_0T_0 = -\partial\tilde{G}_0 / \partial\boldsymbol{\sigma}_0, \quad (23)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \bar{C}_k\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_kT_k = -\partial\tilde{G}_k / \partial\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= -\boldsymbol{\sigma}^* C \boldsymbol{\sigma} / 2 - \boldsymbol{\sigma}^* \boldsymbol{\alpha} T - c^\sigma T^2 / (2\theta), \\ \tilde{G}_0 &= -\boldsymbol{\sigma}_0^* C_0 \boldsymbol{\sigma}_0 / 2 - \boldsymbol{\sigma}_0^* \boldsymbol{\alpha}_0 T_0 - c_0^\sigma T_0^2 / (2\theta), \\ \tilde{G}_k &= -\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^* \bar{C}_k \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k / 2 - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^* \bar{\boldsymbol{\alpha}}_k T_k - c_k^\sigma T_k^2 / (2\theta), \quad 1 \leq k \leq K \end{aligned} \quad (24)$$

$C = (c_{ij})$, $C_0 = (c_{ij}^{(0)})$, $\bar{C}_k = (\bar{c}_{ij}^{(k)})$ – симметричные 6×6 -матрицы податливости (обратные матрицам жесткости A, A_0, \bar{A}_k) фиктивного материала, связующего и k -го армирующего элемента ячейки композита; $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_0, \bar{\boldsymbol{\alpha}}_k$ – шестикомпонентные вектор-столбцы коэффициентов теплового расширения тех же материалов (имеют структуру, аналогичную векторам $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_0, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k$; см. (3)), причем выполняются равенства $\mathbf{B} = A\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{B}_0 = A_0\boldsymbol{\alpha}_0$, $\bar{\mathbf{B}}_k = \bar{A}_k\bar{\boldsymbol{\alpha}}_k$ (см. (1), (2), (22), (23)); $\tilde{G}, \tilde{G}_0, \tilde{G}_k$ – термодинамические потенциалы Гиббса (инварианты) тех же материалов; $c^\sigma, c_0^\sigma, c_k^\sigma$ – теплоемкости (при постоянном напряжении) тех же материалов; остальные векторы и величины имеют тот же смысл, что и в (1)-(3).

Так как допущения 3, 4, 5', 7, 8'а применительно к субэлементу полностью совпадают с гипотезами, использованными в [9], то, повторяя рассуждения из [9], на основании соотношений (23), (24) для l -го субэлемента ячейки получим матричное соотношение, аналогичное (22)

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_l = \langle C \rangle_l \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_l + \langle \boldsymbol{\alpha} \rangle_l \langle T \rangle_l, \quad 1 \leq l \leq L \quad (25)$$

где $\langle C \rangle_l = (\langle c_{ij}^{(l)} \rangle)$ – симметричная 6×6 -матрица, $\langle \boldsymbol{\alpha} \rangle_l = \{ \langle \alpha_i^{(l)} \rangle \}$ ($i, j = \overline{1, 6}$) – шестикомпонентный вектор-столбец, определяемые так

$$\begin{aligned} \langle C \rangle_l &= E_l^* \left(\omega_0^{(l)} C_0 + \sum_k \omega_k^{(l)} R_k^{(l)*} \bar{C}_k R_k^{(l)} \right) E_l, \\ \langle \boldsymbol{\alpha} \rangle_l &= E_l^* \left[\omega_0^{(l)} (\boldsymbol{\alpha}_0 - C_0 \mathbf{G}_l) + \sum_k \omega_k^{(l)} R_k^{(l)*} (\bar{\boldsymbol{\alpha}}_k - \bar{C}_k (R_k^{(l)} \mathbf{G}_l - \mathbf{Q}_k^{(l)})) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь нужно учесть матричные соотношения (7), причем ненулевые элементы 6×6 -матриц $F_k^{(l)}, H_k^{(l)}, D_k^{(l)}$ и шестикомпонентных вектор-столбцов $\mathbf{S}_k^{(l)}$, в отличие от (8), вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} d_{11}^{(l,k)} &= d_{22}^{(l,k)} = \cos^2 \varphi_k^{(l)}, \quad d_{12}^{(l,k)} = d_{21}^{(l,k)} = \sin^2 \varphi_k^{(l)}, \quad d_{14}^{(l,k)} = -d_{24}^{(l,k)} = \\ &= -\sin 2\varphi_k^{(l)}, \quad d_{33}^{(l,k)} = 1, \quad d_{41}^{(l,k)} = -d_{42}^{(l,k)} = 0,5 \sin 2\varphi_k^{(l)}, \quad d_{44}^{(l,k)} = \cos 2\varphi_k^{(l)}, \\ d_{55}^{(l,k)} &= d_{66}^{(l,k)} = \cos \varphi_k^{(l)}, \quad d_{56}^{(l,k)} = -d_{65}^{(l,k)} = \sin \varphi_k^{(l)}, \\ F_{22}^{(l,k)} &= F_{44}^{(l,k)} = F_{55}^{(l,k)} = 1, \quad F_{1j}^{(l,k)} = \bar{c}_{1j}^{(k)}, \quad F_{3j}^{(l,k)} = \bar{c}_{3j}^{(k)}, \quad F_{6j}^{(l,k)} = \bar{c}_{6j}^{(k)}, \\ H_{1j}^{(l,k)} &= c_{1j}^{(0)} \cos^2 \varphi_k^{(l)} + c_{2j}^{(0)} \sin^2 \varphi_k^{(l)} + 0,5 c_{4j}^{(0)} \sin 2\varphi_k^{(l)}, \quad H_{21}^{(l,k)} = \sin^2 \varphi_k^{(l)}, \\ H_{22}^{(l,k)} &= \cos^2 \varphi_k^{(l)}, \quad H_{24}^{(l,k)} = -\sin 2\varphi_k^{(l)}, \quad H_{3j}^{(l,k)} = c_{3j}^{(0)}, \quad H_{41}^{(l,k)} = -H_{42}^{(l,k)} = \\ &= -0,5 \sin 2\varphi_k^{(l)}, \quad H_{44}^{(l,k)} = \cos 2\varphi_k^{(l)}, \quad H_{55}^{(l,k)} = \cos \varphi_k^{(l)}, \quad H_{56}^{(l,k)} = -\sin \varphi_k^{(l)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{6j}^{(l,k)} &= c_{5j}^{(0)} \sin \varphi_k^{(l)} + c_{6j}^{(0)} \cos \varphi_k^{(l)} \quad (j = \overline{1, 6}), \quad S_1^{(l,k)} = \alpha_1^{(0)} \cos^2 \varphi_k^{(l)} + \\
&+ \alpha_2^{(0)} \sin^2 \varphi_k^{(l)} + 0,5\alpha_4^{(0)} \sin 2\varphi_k^{(l)} - \bar{\alpha}_1^{(k)}, \quad S_3^{(k)} = \alpha_3^{(0)} - \bar{\alpha}_3^{(k)}, \\
S_6^{(l,k)} &= \alpha_5^{(0)} \sin \varphi_k^{(l)} + \alpha_6^{(0)} \cos \varphi_k^{(l)} - \bar{\alpha}_6^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L
\end{aligned} \tag{27}$$

В соотношениях (25)-(27) использованы обозначения: $\langle C \rangle_l$ – матрица осредненных податливостей композиции в пределах l -го субэлемента; $\langle \alpha \rangle_l$ – вектор осредненных коэффициентов теплового расширения в пределах l -го субэлемента; остальные величины имеют тот же смысл, что и в (5)-(8), (23).

В процессе вывода соотношений (25), (26) с учетом (9), (27) получаются дополнительные равенства (7), (10), а также

$$\sigma_0^{(l)} = E_l \langle \sigma \rangle_l - \mathbf{G}_l \langle T \rangle_l, \quad 1 \leq l \leq L \tag{28}$$

$$\bar{\sigma}_k^{(l)} = R_k^{(l)} \sigma_0^{(l)} + \mathbf{Q}_k^{(l)} \langle T \rangle_l, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 1 \leq l \leq L \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
\theta^{-1} \langle c^\sigma \rangle_l &= \omega_0^{(l)} \left[\theta^{-1} c_0^\sigma - \mathbf{G}_l^* (2\alpha_0 - C_0 \mathbf{G}_l) \right] + \sum_k \omega_k^{(l)} \left[\theta^{-1} c_k^\sigma - \right. \\
&\left. - \mathbf{G}_l^* R_k^{(l)*} \left(\bar{C}_k (2\mathbf{Q}_k^{(l)} - R_k^{(l)} \mathbf{G}_l) + 2\bar{\alpha}_k \right) + \mathbf{Q}_k^{(l)*} (2\bar{\alpha}_k + \bar{C}_k \mathbf{Q}_k^{(l)}) \right], \quad 1 \leq l \leq L
\end{aligned} \tag{30}$$

Соотношение (28) определяет напряжения в связующем $\sigma_0^{(l)}$ через осредненные напряжения $\langle \sigma \rangle_l$ и температуру $\langle T \rangle_l$ композиции в пределах l -го субэлемента ячейки. Равенство (29) определяет напряжения в k -м армирующем элементе $\bar{\sigma}_k^{(l)}$ (в локальной системе координат $x_i^{(k)}$) через осредненную температуру $\langle T \rangle_l$ и напряжения в связующем $\sigma_0^{(l)}$ (заданные в глобальной системе координат x_i) в пределах l -го субэлемента ячейки. Соотношение же (30) позволяет вычислить среднюю теплоемкость (при постоянстве напряжений) композиции $\langle c^\sigma \rangle_l$ в пределах l -го субэлемента ячейки.

Таким образом, равенство (25) с учетом (26), (27), (7) задает в матричной форме определяющие соотношения для материала, эквивалентного композиту в пределах l -го субэлемента.

Согласно допущению 1, как и в разделе 1, исследуемую композитную среду вновь можно заменить эквивалентной ей слоистой средой с регулярно чередующимися анизотропными слоями (см.рис.4), термоупругие характеристики которых определяются выражениями (26) с учетом (7), (27). Следовательно, по-прежнему можно ввести в рассмотрение допущения 9-11, в которых ссылку на соотношение (5) нужно заменить ссылкой на равенство (25).

Так как допущения 9, 10, 6', 11, 8'б аналогичны гипотезам 3, 4, 5', 7, 8'а, соответственно, то, вновь повторяя рассуждения из [9], окончательно получим определяющие соотношения для рассматриваемой композитной среды в виде (22), где матрица C и вектор α определяются матричными равенствами

$$\begin{aligned}
C &= E^* \left(\Omega_1 \langle C \rangle_1 + \sum_{l=2}^L \Omega_l R_l^* \langle C \rangle_l R_l \right) E, \\
\alpha &= E^* \left[\Omega_1 (\langle \alpha \rangle_1 - \langle C \rangle_1 \mathbf{G}) + \sum_{l=2}^L \Omega_l R_l^* (\langle \alpha \rangle_l - \langle C \rangle_l (R_l \mathbf{G} - \mathbf{Q}_l)) \right]
\end{aligned} \tag{31}$$

где нужно учесть соотношения (15), причем ненулевые элементы 6×6 -матриц F_l , H и шестикомпонентных вектор-столбцов S_l , в отличие от (16), вычисляются по формулам

$$F_{22}^{(l)} = F_{44}^{(l)} = F_{55}^{(l)} = 1, \quad F_{1j}^{(l)} = \langle c_{1j}^{(l)} \rangle, \quad F_{3j}^{(l)} = \langle c_{3j}^{(l)} \rangle, \quad F_{6j}^{(l)} = \langle c_{6j}^{(l)} \rangle,$$

$$H_{22} = H_{44} = H_{55} = 1, \quad H_{1j} = \langle c_{1j}^{(l)} \rangle, \quad H_{3j} = \langle c_{3j}^{(l)} \rangle, \quad H_{6j} = \langle c_{6j}^{(l)} \rangle \quad (j = \overline{1, 6}), \quad (32)$$

$S_1^{(l)} = \langle \alpha_1^{(l)} \rangle - \langle \alpha_1^{(l)} \rangle$, $S_3^{(l)} = \langle \alpha_3^{(l)} \rangle - \langle \alpha_3^{(l)} \rangle$, $S_6^{(l)} = \langle \alpha_6^{(l)} \rangle - \langle \alpha_6^{(l)} \rangle$, $2 \leq l \leq L$
 $\langle c_{ij}^{(l)} \rangle$, $\langle \alpha_i^{(l)} \rangle$ – компоненты матрицы $\langle C \rangle_l$ и вектора $\langle \alpha \rangle_l$ соответственно (см. (25), (26)).

В процессе вывода соотношений (31) с учетом (15), (17), (32) получаются дополнительные равенства (18), а также

$$\langle \sigma \rangle_1 = E \sigma - \mathbf{G} T \quad (33)$$

$$\langle \sigma \rangle_l = R_l \langle \sigma \rangle_1 + \mathbf{Q}_l T \quad (2 \leq l \leq L) \quad (34)$$

$$\frac{c^\sigma}{\theta} = \Omega_1 \left[\theta^{-1} \langle c^\sigma \rangle_1 - \mathbf{G}^* (2 \langle \alpha \rangle_1 - \langle C \rangle_1 \mathbf{G}) \right] + \sum_{l=2}^L \Omega_l \left[\theta^{-1} \langle c^\sigma \rangle_l - \mathbf{G}^* R_l^* (\langle C \rangle_l (2 \mathbf{Q}_l - R_l \mathbf{G}) + 2 \langle \alpha \rangle_l) + \mathbf{Q}_l^* (2 \langle \alpha \rangle_l + \langle C \rangle_l \mathbf{Q}_l) \right] \quad (35)$$

Соотношение (33) определяет осредненные напряжения в первом субэлементе $\langle \sigma \rangle_1$ через осредненную температуру T и осредненные напряжения в ячейке σ . Равенство (34) определяет осредненные напряжения в l -м субэлементе $\langle \sigma \rangle_l$ ($2 \leq l \leq L$) через осредненную температуру ячейки T и осредненные напряжения в первом субэлементе $\langle \sigma \rangle_1$. Соотношение (35) позволяет вычислить теплоемкость (при постоянстве напряжений) ячейки c^σ через аналогичные величины $\langle c^\sigma \rangle_l$, определенные ранее для всех субэлементов.

Таким образом, согласно допущению 1, равенство (22) с учетом (31), (15), (32) задает в матричной форме определяющие соотношения для фиктивного материала, эквивалентного рассматриваемой композитной среде.

Как и в разделе 1, в рамках предложенной здесь модели можно определить напряжения $\sigma_0^{(l)}$, $\bar{\sigma}_k^{(l)}$ и деформации $\epsilon_0^{(l)}$, $\bar{\epsilon}_k^{(l)}$ ($1 \leq k \leq K$, $1 \leq l \leq L$) в каждом компоненте композиции по известным осредненным напряжениям σ и температуре T . Действительно, пусть известны напряжения σ и температура T , тогда из (18), (33), (34) известны $\langle T \rangle_l$, $\langle \sigma \rangle_l$ ($1 \leq l \leq L$), а из (10), (28), (29) известны $T_0^{(l)}$, $\sigma_0^{(l)}$, $T_k^{(l)}$, $\bar{\sigma}_k^{(l)}$, после чего из (23) можно определить и деформации $\epsilon_0^{(l)}$, $\bar{\epsilon}_k^{(l)}$ ($1 \leq k \leq K$, $1 \leq l \leq L$).

Замечание^o4. Если в рамках построенной здесь модели для связующего (пенопластмассы) осуществить предельные переходы $c_{ij}^{(0)} \rightarrow \infty$, $\alpha_i^{(0)} \rightarrow 0$ (см. (23)), то по изложенной выше методике получим определяющие соотношения (22) для ребристой конструкции (типа сотовой, складчатой, гофра и т.п.), пустоты в которых не заполнены пенопластмассой.

3. ВЕРИФИКАЦИЯ СТРУКТУРНЫХ МОДЕЛЕЙ

В открытой печати отсутствуют экспериментальные данные по упругому деформированию композитных сред с криволинейным армированием ребристыми элементами, что не позволяет непосредственно оценить точность структурных моделей, предложенных в разделах 1 и 2, а также ранее в [9-11,13]. Поэтому в качестве альтернативной возможности верификации этих структурных теорий выступает сравнение значений эффективных жесткостей композитной среды, предсказываемых ими, со значениями, полученными на основе КЭМ (численного эксперимента), так как в последнем случае не используются никакие упрощающие гипотезы (типа допущений 2, 4–6, 5', 6' из разделов 1 и 2) и расчет на базе КЭМ можно рассматривать как эталонный. (Методика определения эффективных характеристик 3D-периодических сред на основе КЭМ достаточно подробно изложена во многих публикациях [19,21 и др.], поэтому не будем останавливаться более подробно на обсуждении этого вопроса.)

Верификацию указанных структурных моделей проведем на примере сотовой ячейки, полости в которой заполнены пенопластмассой. Представительная ячейка сотовой ребристой конструкции изображена на рис.1 и характеризуется наличием двух криволинейных (кусочно-плоских) армирующих элементов (1 и 2) постоянной толщины $\delta_1 = \delta_2 = 0,05$ мм, а диаметр соты $d = 8$ мм [8]. Армирующие элементы изготовлены из дуралюмина Д16АТВ с упругими характеристиками [8]: $E_k = 67,7$ ГПа, $\nu_k = 0,41$ ($k = 1, 2$). Пустоты в сотах заполнены пенопластмассой ПЭ-1 с упругими константами [1]: $E_0 = 40$ МПа, $\nu_0 = 0,25$. (Здесь: E_k, ν_k ($0 \leq k \leq K = 2$) – модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропного материала k -го компонента композиции.)

В случае изотропных материалов фаз композиции компоненты матриц A_0, \bar{A}_k и C_0, \bar{C}_k (см. (2), (23)) определяются по формулам [17,18]

$$\begin{aligned} a_{ii}^{(k)} &= \bar{a}_{ii}^{(k)} = 2G_k(1-\nu_k)/(1-2\nu_k), \quad a_{ij}^{(k)} = \bar{a}_{ij}^{(k)} = 2G_k\nu_k/(1-2\nu_k), \quad a_{nn}^{(k)} = \\ &= \bar{a}_{nn}^{(k)} = G_k, \quad c_{ii}^{(k)} = \bar{c}_{ii}^{(k)} = 1/E_k, \quad c_{ij}^{(k)} = \bar{c}_{ij}^{(k)} = -\nu_k/E_k, \quad c_{nn}^{(k)} = \bar{c}_{nn}^{(k)} = 1/G_k, \quad (36) \\ 2G_k &= E_k/(1+\nu_k), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad j \neq i, \quad n = 4, 5, 6, \quad 0 \leq k \leq K \end{aligned}$$

В табл.1 приведены расчетные значения эффективных жесткостей a_{ij} (ненулевые компоненты матрицы A в (1)) рассматриваемой композитной среды, определенные с учетом (36) по структурным моделям, предложенным в разделах 1, 2 и ранее в [9-11,13], а также на основе КЭМ [19]. (При расчетах по структурной теории из раздела 2 используется соотношение $A = C^{-1}$, где C – матрица эффективных податливостей композиции (см. (22)); аналогично и для структурной модели из [9].)

В рамках КЭМ для определения значений эффективных жесткостей $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{44}$ использовались плоские конечные элементы (КЭ) при задании условий плоского деформирования, причем ячейка (см.рис.1) разбивалась на 47558 КЭ. Для определения остальных эффективных постоянных использовались пространственные КЭ, причем в силу условий симметрии оказалось достаточным рассмотреть четверть ячейки. При этом по направлению x_3 (перпендикулярному плоскости рис.1) задавался размер ячейки $h = 4$ мм; количество пространственных КЭ равно 56498. Таким образом, при КЭМ

использовалась достаточно мелкая разбивка ячейки на КЭ, что позволило адекватно учесть неоднородность напряженно-деформированного состояния (НДС) во всех компонентах композиции и дало основание считать результаты расчета на базе КЭМ достаточно надежными (достоверными).

Таблица 1.

Расчетные значения эффективных жесткостей пенопластмассы ПЭ-1, армированной в виде сот ребристыми элементами из сплава Д16АТВ.

Характеристики жесткости, МПа	Модели из [9-11]	Модели из [13] и разделов 1 и 2	КЭМ [19]
1	2	3	4
a_{11}	502,5 / 495,3 / 488,3 ¹	427,7 / 409,5 / 404,1 ²	405,2
$a_{12} = a_{21}$	171,0 / 167,0 / 163,0	371,9 / 349,9 / 345,0	364,7
$a_{13} = a_{31}$	266,4 / 261,8 / 257,3	304,2 / 301,4 / 297,2	306,7
a_{22}	898,7 / 889,1 / 879,7	472,6 / 445,3 / 440,8	405,2
$a_{23} = a_{32}$	429,0 / 423,4 / 417,9	321,5 / 316,1 / 312,2	307,1
a_{33}	1621,7 / 1617,5 / 1613,4	1578,5 / 1572,0 / 1568,5	1568,6
$2a_{44}$	634,9 / 329,3 / 170,8	48,3 / 47,8 / 47,0	48,2
$2a_{55}$	617,0 / 612,8 / 608,6	558,7 / 553,4 / 548,1	549,1
$2a_{66}$	386,4 / 383,2 / 378,0	378,5 / 376,1 / 373,6	380,4

¹ Первое число – расчет по модели из [10] (верхняя граница), второе – из [11], третье – из [9] (нижняя граница).

² Первое число – расчет по модели из раздела 1 (уточненная верхняя граница), второе – из работы [13], третье – из раздела 2 (уточненная нижняя граница).

В работах же [9-11] при построении структурных моделей использовались упрощающие гипотезы, в частности НДС в компонентах композиции в пределах представительной ячейки предполагалось постоянным (причем ячейка не разбивалась на субэлементы, как в [13] и разделах 1, 2 настоящего исследования). Эти допущения позволили существенно упростить методику определения эффективных жесткостей композиции (как и [13] и в разделах 1 и 2, все вычисления сводятся к алгебре 6×6 -матриц). Однако, как видно из табл.1, использование в [9-11] упрощающих гипотез без разбивки ячейки на субэлементы приводит для некоторых характеристик (например, a_{12} , a_{22}) к занижению или завышению значений в 2 раза, а для сдвиговой жесткости a_{44} в плоскости x_1x_2 – в 3,5-13,2 раза. Удовлетворительно согласуются с КЭМ лишь жесткости a_{33} , a_{55} , a_{66} (ср. столбцы 2 и 4 в табл.1).

Значения a_{ij} , приведенные в 3-м и 4-м столбцах табл.1, показывают, что структурные модели, предложенные в [13] и в разделах 1, 2 настоящего исследования, удовлетворительно согласуются с КЭМ, причем лучше всего с эталонным расчетом согласуется модель из раздела 2, определяющая нижние границы эффективных жесткостей рассматриваемой композиции. В рамках этой модели наибольшее отклонение от расчета на базе КЭМ наблюдается для эффективной жесткости a_{22} и составляет 8,8% (для остальных характеристик различие не превышает 5%). При этом следует отметить, что реально

для выполнения расчетов, результаты которых представлены в столбце 3 табл.1, использовалось разбиение представительной ячейки всего на два субэлемента (например, *II* и *III* на рис.1). Это допустимо в силу того, что слоистый материал, эквивалентный рассматриваемой композитной среде (см. рис.4), состоит из регулярно чередующихся слоев двух типов: первый тип слоев армирован в направлении x_2 (как субэлемент *III* на рис.1), а второй тип слоев армирован перекрестно под углами $\varphi_k = \pm\pi/6$ (как субэлемент *II* на рис.1). Разбивка ячейки на пять субэлементов (как показано на рис.1) в силу допущений, используемых в [13] и в разделах 1 и 2, приводит к тем же значениям эффективных жесткостей a_{ij} , что и указанные в столбце 3 табл.1. При КЭМ, как уже отмечалось, использовалась разбивка ячейки на несколько десятков тысяч КЭ. При более грубой разбивке ячейки на КЭ результаты эталонного расчета и расчетов по моделям из разделов 1 и 2 сближаются. Кроме того, дополнительные расчеты показали, что при гладком криволинейном армировании ячейки (см.рис.2) результаты расчетов на базе КЭМ и по моделям из [13] и из разделов 1 и 2 также сближаются, обеспечивая 5% точность расчетных значений эффективных жесткостей a_{ij} по сравнению с эталонными значениями.

Расчеты на базе КЭМ показали [19], что при жестком нагружении ячейки, например, в плоскости x_1x_2 границы между субэлементами депланируют (не остаются плоскими, как на рис.1), кроме того, наблюдаются изгибные формы деформирования армирующих элементов, т.е. НДС материалов фаз композиции не является однородным (в отличие от допущений 4, 10), что и приводит к расхождению значений a_{22} , указанных в столбцах 3 и 4 табл.1, на величины порядка 10%, и именно поэтому в рамках использованных в [13] и в настоящем исследовании допущений эту разницу полностью устранить не удастся.

Известно, что для заполнителей трехслойных панелей, используемых на практике, наиболее значимыми являются эффективные жесткости a_{33} , a_{55} , a_{66} [3]. Их значения, приведенные в столбце 3 табл.1, хорошо согласуются с эталонным расчетом (отклонение не превышает 2%).

Согласно замечаниям 2 и 4, по формулам из разделов 1 и 2 можно получить эффективные упругие характеристики для ребристой конструкции, полости в которой не заполнены пенопластмассой. Ранее, на основе совершенно другого подхода (а именно, методами строительной механики [22]), эффективные упругие характеристики таких конструкций были получены, например, в [2-4 и др.]. Поэтому представляется целесообразным сравнить эффективные характеристики, например, сотового заполнителя, рассчитанные по методикам, предложенным в [2,3,9-11,13] и в настоящем исследовании, а также на базе КЭМ, и сопоставить их с известными экспериментальными данными [8].

Рассматривается сотовый заполнитель с ячейкой прежних размеров [8], выполненный из сплава Д16АТВ. В табл.2 приведены расчетные и экспериментальные значения эффективных упругих технических констант рассматриваемой сотовой конструкции. (В расчетах по моделям из разделов 1 и 2, а также из работ [9-11,13] и при КЭМ для связующего принималось $\nu_0 = 0$, $E_0 = 4$ кПа, чтобы обеспечить устойчивый счет и отсутствие деления на ноль при обращении матриц.) При этом соотношения (1) с учетом (3) при $T = 0$ предполагаются разрешенными относительно деформаций [18] (ср. с (22))

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_{11}} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_{22}} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_{33}} \sigma_{33}, & \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} \sigma_{11} + \frac{1}{E_{22}} \sigma_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_{33}} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_{22}} \sigma_{22} + \frac{1}{E_{33}} \sigma_{33}, & 2\varepsilon_{il} &= \sigma_{il} / G_{il} \quad (i \neq l, \quad i, l = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (37)$$

где E_{ii} , G_{il} , ν_{il} – модули упругости первого и второго рода и коэффициенты Пуассона ортотропного эквивалентного материала.

Таблица 2.

Эффективные технические константы сотового заполнителя.

Константы фиктивного материала	Метод расчета (модели)					Экспери- ментальные данные [8]
	Модель из [2, стр. 109]	Модель из [3]	Модели из [9-11]	Модели из [13] и разделов 1 и 2	КЭМ [19]	
E_{11} , МПа	410,6/408,0 ¹	–	404,4/399,0/393,6 ²	0,016/0,016/0,016 ³	1,383	–
E_{22} , МПа	768,6/759,6	–	723,9/717,6/711,4	0,016/0,016/0,016	1,359	–
E_{33} , МПа	1278,2	1566,8	1303/1303/1303	1315/1284/1284	1282,1	–
G_{12} , МПа	–	–	301,6/148,8/73,5	0,003/0,003/0,003	0,804	–
G_{23} , МПа	263,6	288,7	292,9/290,8/288,7	261,6/258,1/256,1	258,9	216–246
G_{31} , МПа	173,2	173,2	177,5/175,3/173,2	174,2/173,9/170,7	172,0	83,5–131,0
ν_{21}	0,346/0,354	–	0,215/0,213/0,211	1,000/1,000/1,000	0,989	–
ν_{12}	0,185/0,190	–	0,120/0,118/0,117	1,000/1,000/1,000	1,007	–

¹ В числителе: расчет при толщине заполнителя $h = 8$ мм; в знаменателе: расчет при $h = 13$ мм. (Расчетные значения E_{11} , E_{22} , ν_{21} , ν_{12} , определенные по методике из [2], зависят от толщины заполнителя h в направлении x_3 . Значения толщины h заполнителя при этом выбраны такими, какие использовались в [8] при проведении экспериментов.)

² Первое число – расчет по модели из [10] (верхняя граница), второе – из [11], третье – из [9] (нижняя граница).

³ Первое число – расчет по модели из раздела 1 (уточненная верхняя граница), второе – из работы [13], третье – из раздела 2 (уточненная нижняя граница).

Из сравнения чисел, приведенных в табл.2, следует хорошее совпадение расчетных значений G_{23} , G_{31} , определенных по всем обсуждаемым методикам, и их удовлетворительное согласование с экспериментом, причем наиболее близки к эксперименту значения, определенные по структурным формулам из раздела 2 настоящего исследования. Экспериментальные данные, как видно из табл.2, имеют значения меньше расчетных. В работе [8] авторы объясняют это тем, что в расчетах используется идеально правильная форма соты, а в натурном эксперименте наблюдается наличие начальной погиби ребристых элементов сотовой ячейки. Последнее обстоятельство сказывается на снижении жесткости реального сотового заполнителя. (Так, в работах [3,6] теоретически и на основе КЭМ показано, что после потери устойчивости элементов соты при их сжатии или сдвиге в закритическом состоянии значения модулей упругости E_{33} , G_{23} , G_{31} становятся меньше значений, например, приведенных в столбце 3 табл.2. Исследование этих вопросов выходит за рамки настоящей работы.)

Общеизвестен следующий экспериментальный факт [4]: для сотового заполнителя значения модулей упругости E_{11} , E_{22} , G_{12} пренебрежимо малы по сравнению с E_{33} , G_{23} , G_{31} . Поэтому в [3] значения E_{11} , E_{22} , G_{12} вообще не определены, а в [2] не вычислено значение G_{12} , что нашло отражение в столбцах 2 и 3 табл.2. Согласно же структурным моделям из [9-11] расчетные значения E_{11} , E_{22} , G_{12} имеют тот же порядок, что и G_{23} , G_{31} ; аналогично, значения модулей E_{11} , E_{22} , определенных по модели из [2] (см. столбец 2 в табл.2), также имеют порядок G_{23} , G_{31} , что противоречит экспериментальным фактам. Напротив, согласно КЭМ и моделям, предложенным в разделах 1, 2 и в [13], значения E_{11} , E_{22} , G_{12} составляют менее 1% от значений E_{33} , G_{23} , G_{31} (см. столбцы 5 и 6 в табл.2), т.е. пренебрежимо малы по сравнению с последними, что согласуется с известными экспериментальными данными.

Кроме того, значения коэффициентов Пуассона ν_{21} , ν_{12} , приведенные в столбцах 2 и 4 табл.2, в несколько раз меньше эталонных значений, определенных на базе КЭМ. Значения же ν_{21} , ν_{12} в столбце 5 табл.2, напротив, хорошо согласуются с эталонными значениями (см. столбец 6 табл.2).

ВЫВОДЫ

Предложенные структурные модели позволяют существенно уточнить верхние и нижние границы эффективных упругих характеристик композитных сред, армированных криволинейными ребристыми элементами, при общей анизотропии материалов компонентов композиции, а также ребристых конструкций типа гофра, складчатых, сотовых и др., применяемых в качестве легких заполнителей в трехслойных панелях.

Уточненная «вилка» значений эффективных жесткостей для таких сред оказалась достаточно узкой. Так, для сотового заполнителя и пенопластмассы, армированной в виде сот, она не превышает 8% по отношению к значениям, соответствующим уточненным нижним границам эффективных жесткостей.

Проведенные расчеты показали, что с экспериментальными данными и с эталонными расчетами, выполненными на базе КЭМ, лучше согласуются структурные формулы, определяющие нижние границы эффективных жесткостей ребристо-армированных композитных сред. Полученные ранее в [9,10] верхние и нижние границы значений эффективных жесткостей для таких сред плохо согласуются с эталонными расчетами и данными экспериментов. Это объясняется тем, что в работах [9,10], как и в [11], ячейка с криволинейным армированием (см., например, рис.1), по сути, заменялась ячейкой с прямолинейным армированием с тем же объемным содержанием усиливающих элементов (рис.2).

Уточненная структурная модель, предложенная ранее в [13] и не использующая условий энергетической эквивалентности, предсказывает значения эффективных жесткостей, лежащие между уточненными верхней и нижней границами, но эти значения все же ближе к нижним оценкам эффективных характеристик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Я., Бородин М.Я., Павлов В.В. Конструкции с заполнителями из пенопластов. – М.: Машиностроение, 1972. – 212 с.
2. Александров А.Я., Брюккер Л.Э., Куршин Л.М., Прусаков А.П. Расчет трехслойных панелей. – М.: Оборонгиз, 1960. – 271 с.
3. Акишев Н.И., Закиров И.И., Паймушин В.Н., Шишов М.А. Теоретико-экспериментальный метод определения усредненных упругих и пространственных характеристик сотового заполнителя трехслойных конструкций // Механика композитных материалов. – 2011. – Т.47. – №4. – С.543-556.
4. Noor A.K., Burton W.S., Bert Ch.W. Computational models for sandwich panels and shells // Appl. Mech. Rew. – 1996. – Vol.49. – N3. – P.155-199.
5. Бухтяк М.С., Никульчиков А.В. Моделирование деформации сотовой панели // Вестник Томского государственного университета. Серия: Математика и механика. – 2013. – №2 (22). – С.5-16.
6. Wilbert A., Jang W.-Y., Kyriakides S., Floccari J. F. Buckling and progressive crushing of laterally loaded honeycomb // Intern. J. of Solids and Structures. – 2011. – N48. – P.803-816.
7. Vaziri A., Xue Z., Hutchinson J. W. Metal sandwich plates with polymer foam-filled cores // J. of Mechanics of Materials and Structures. – 2006. – Vol.1. – N1. – P.97-127.
8. Брюккер Л.Э., Ракин А.С. Испытания трехслойных стержней при нормальных и повышенных температурах // Динамика и прочность авиационных конструкций: Межвуз. сб. научн. трудов. – Новосибирск: Изд-во НГУ, НЭТИ, 1978. – Вып.4. – С.73-79.
9. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Статический метод определения эффективных термомеханических характеристик сложно армированных пенопластмасс // Научный вестник НГТУ. – 2009. – №4 (37). – С.101-114.
10. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Кинематический метод определения эффективных термомеханических характеристик сложно армированных пенопластмасс // Конструкции из композиционных материалов. – 2010. – №4. – С.36-48.
11. Янковский А.П. Построение определяющих уравнений термоупругого поведения сложно армированных пенопластмасс // Техническая механика. – 2010. – №1. – С.71-82.
12. Жиков В.М., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматлит, 1993. – 464 с.
13. Янковский А.П. Моделирование термоупругого поведения ребристо-армированных пенопластмасс. Часть 1. Уточненная структурная модель // Космонавтика и ракетостроение. – 2013. – №3 (72). – С.124-132.
14. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
15. Баженов С.Л., Берлин А.А., Кульков А.А., Ошмян В.Г. Полимерные композиционные материалы: Научное издание. – Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2010. – 352 с.
16. Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология: Учебное пособие. – СПб.: Профессия, 2009. – 560 с.
17. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
18. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.

19. *Щербатюк Д.А., Янковский А.П.* Верификация структурных моделей пространственно-армированных пенопластмасс и сотовых заполнителей сэндвич-панелей на основе проведения численных экспериментов // Теоретическая и прикладная механика: Международный научно-технический сборник. – Минск: Изд-во БНТУ, 2013. – Вып.28. – С.322-327.
20. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
21. *Олегин И.П., Нигирич Ю.Б., Расторгуев С.Г.* Определение эффективных характеристик композиционных материалов методом конечно-элементного моделирования // XXI Всерос. конф. «Численные методы решения задач теории упругости и пластичности». Труды. – Кемерово, 2009. – Новосибирск: «Параллель», 2009. – С.183-189.
22. *Александров А.В., Лащеников Б.Я. Шапошников Н.Н.* Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы: Учебник для вузов. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.

Поступила в редакцию 17 сентября 2014 года.

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., проф., в.н.с., лаборатория «Физики быстропротекающих процессов», ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: lab4nemir@rambler.ru