

УДК 539.3

**МОДЕЛЬ УПРУГОГО СОСТОЯНИЯ СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА,
ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛОКНА КОТОРОГО ОБРАЗУЮТ
ГЕКСАГОНАЛЬНУЮ СТРУКТУРУ**

Николаев А.Г., Танчик Е.А.

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского
«Харьковский авиационный институт», г.Харьков, Украина***РЕЗЮМЕ**

Рассматривается цилиндрический образец упругого материала с двадцатью четырьмя цилиндрическими включениями, образующими гексагональную структуру. К образцу приложена кусочно-постоянная нормальная нагрузка, а волокна находятся в условиях идеального контакта с матрицей. Граничные условия задачи удовлетворяются точно при помощи обобщенного метода Фурье. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая решается численно методом редукции. Приведен анализ распределения напряжений в зонах их наибольшей концентрации.

Ключевые слова: составной цилиндр; цилиндрическое включение; гексагональная структура; обобщенный метод Фурье

**THE ELASTIC STATE MODEL OF COMPOSITE CYLINDER,
WHICH HAS CYLINDRICAL FIBERS OF A HEXAGONAL
STRUCTURE**

Nikolaev A.G., Tanchik E.A.

*National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», Kharkiv, Ukraine***SUMMARY**

Cylindrical sample of elastic material with twenty fourth cylindrical inclusions, which have the hexagonal structure, is considered. It is assumed that the sample is under piecewise constant normal load, and the fibers are in perfect contact with the matrix. The boundary conditions of the problem are satisfied exactly with help of the generalized Fourier method. The problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations which is solved numerically by the method of reduction. The analysis of stress distribution in the areas of their greatest concentration is given.

Key words: composite cylinder; cylindrical inclusion; hexagonal structure; generalized Fourier method

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В монографии [1] разработаны методы микромеханики композиционных сред с дискретной структурой и трещинами и некоторые их приложения к конкретным материалам. Рассмотрено влияние свойств компонентов и вида структуры

неоднородных сред на их эффективные (интегральные) параметры и распределение внутренних полей. Напряженно-деформированное состояние композита моделируется распределением напряжений в окрестности нескольких включений (плоская задача) или одного включения в случае зернистого композита.

В статье [2] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, т.е. учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В статье [3] представлены исследования по моделированию структуры пористых материалов с малой объемной долей содержания твердой фазы. В качестве моделей рассматриваются главным образом стержневые и оболочечные конструкции. Предложена классификация моделей по степени упорядоченности структурных единиц. Представляется, что наиболее адекватной с точки зрения морфологии и деформационных свойств является модель, состоящая из хаотически ориентированных 14-гранных ячеек. Для анализа представленной модели предлагается метод выделения структурного элемента.

В работе [4] предлагается алгоритм оценки свойств волокнистого композита при растяжении, основанный на процедуре В.З.Власова; дается оценка эффективных свойств эквивалентного гомогенного материала; приводится сравнение результатов расчета эффективного модуля Юнга с результатами других авторов.

В работе [5] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, т.к. уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В работах [6,7] предложен метод определения напряженного состояния конечного цилиндра, основанный на принципе суперпозиции и разложении

тензора напряжений в ряды Фурье и Бесселя-Дини. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В работе [8] исследован трансверсально изотропный стержень с цилиндрическим включением с осесимметричными собственными деформациями. Получено аналитическое упругое решение для перемещений, напряжений и энергии упругой деформации стержня.

В статье [9] для прогнозирования прочностных свойств композитов рассматривается постановка нелинейных связанных краевых задач микромеханики композитов, учитывающих стадию структурного накопления микроповреждений, когда поля структурных микроповреждений являются локально эргодическими. В целях описания структурного разрушения и прогнозирования прочностных свойств композитов существенно расширяется база определяющих соотношений: вводится новый материальный носитель – тензор повреждаемости четвертого ранга. Построены новые функционалы связанной стохастической краевой задачи, позволяющие наряду с прогнозированием упругих свойств строить расчетные поверхности прочности реальных композитов.

В работах [10,11] введены локальные осесимметричные модели напряженного состояния пористого и зернистого композиционного материалов с порами или зёрнами в форме вытянутых сфероидов. В работе [12] разработана локальная неосесимметричная математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала. В этих моделях напряжения в композитах описываются при помощи обобщенного метода Фурье. Суть метода состоит в построении общего решения уравнения Ламе в виде суперпозиции точных решений в нескольких различных криволинейных системах координат. В каждой отдельной системе решения строятся методом разделения переменных. Удовлетворение граничным условиям осуществляется с помощью теорем сложения, связывающих решения в разных системах координат. Аппарат обобщенного метода Фурье разработан в [13,14].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бесконечный цилиндрический образец Ω_0 однонаправленного волокнистого материала, волокна в котором моделируются двадцатью четырьмя цилиндрическими включениями Ω_j ($j=1 \div N$) (рис.1). Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические (ρ_j, φ_j, z_j) системы координат, начала которых отнесены к центрам включений и образца O_j ($j=0 \div N$), расположенным в одной плоскости $z=0$. Радиусы цилиндров Ω_j равны R_j , границы цилиндров Γ_j описываются уравнениями $\rho_j = R_j$. Предполагается, что упругие постоянные матрицы и включений соответственно равны (G_0, σ_0) и (G_j, σ_j) .

Вектор упругих перемещений удовлетворяет следующей краевой задаче для уравнения Ламе

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями на внешней границе

$$\sigma_{\rho}|_{\Gamma_0} = \begin{cases} T, & |z| \leq h, \\ 0, & |z| > h, \end{cases} \quad \tau_{\rho z}|_{\Gamma_0} = \tau_{\rho\varphi}|_{\Gamma_0} = 0 \quad (2)$$

и условиями сопряжения на границе раздела фаз

$$\mathbf{FU}|_{\Gamma_j} = \mathbf{FU}_j|_{\Gamma_j}, \quad (3)$$

$$\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad (4)$$

где \mathbf{U} , \mathbf{U}_j – векторы перемещений в матрице и в j -ом включении, \mathbf{FU} , \mathbf{FU}_j – соответствующие векторы напряжений на поверхностях Γ_j , σ – коэффициент Пуассона, T – постоянное напряжение. Условия (3), (4) отражают идеальный контакт между матрицей и волокном.

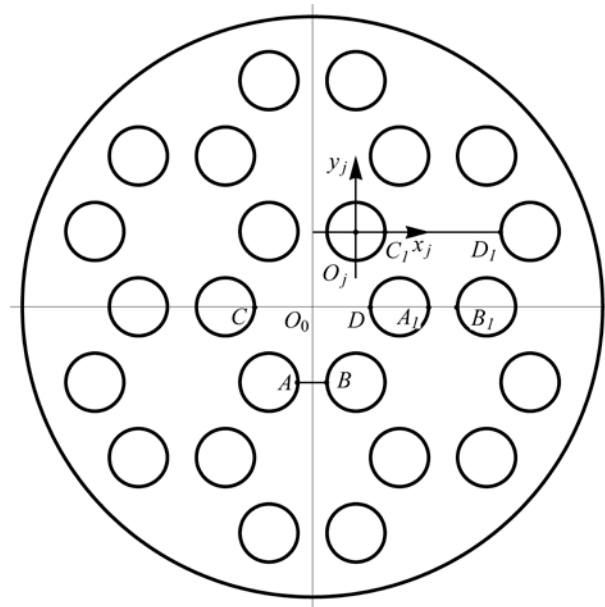


Рис.1. Схематическое представление задачи.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Общее решение краевой задачи (1)-(4) в областях Ω_0 и Ω_j ищется в виде суперпозиции базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам включений

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda \quad \text{в } \Omega_0,$$

$$\mathbf{U} = \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int B_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda \quad \text{в } \Omega_j$$

Указанные выше базисные решения представим в виде [13]

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} \mathbf{D}_s u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z); \quad s = 1, 3 \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} \mathbf{B}_2 u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \quad (6)$$

$$\mathbf{D}_2 = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla - \chi [\mathbf{e}_z \times [\nabla \times \mathbf{e}_z]]$$

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho, \varphi, z) = e^{i\lambda z + im\varphi} \tilde{K}_m(\lambda\rho), \quad u_{\lambda,m}^{-(3)}(\rho, \varphi, z) = e^{i\lambda z + im\varphi} I_m(\lambda\rho)$$

где $\mathbf{D}_1 = \nabla$, $\mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi\mathbf{e}_z$, $\mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z]$ (здесь i – мнимая единица); $I_m(x)$ – модифицированная функция Бесселя, $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}x)^m K_m(|x|)$, $K_m(x)$ – функция Макдональда; $\chi = 3 - 4\sigma$, $u_{\lambda,m}^{\pm(3)}$ – полный набор частных решений уравнения Лапласа в цилиндрических координатах.

В развернутой координатной форме базисные решения (5), (6) имеют вид

$$\mathbf{U}_{1,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \mp u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 + i u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0 \quad (7)$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \mp (D - \chi) [u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} + u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1] + i D u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0 \quad (8)$$

$$\mathbf{U}_{3,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \pm u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 \quad (9)$$

где $D = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$, $\mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi)e^{i\varphi}$, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi)e^{-i\varphi}$, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z$, $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ – орты цилиндрической системы координат.

Вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} имеет вид

$$\mathbf{FU} = 2G \left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \text{div} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{U}) \right], \quad (10)$$

где G – модуль сдвига.

Применив к формулам (7)-(9) оператор (10) на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho$ получим

$$\mathbf{FU}_{1,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{2G}{\rho} \left\{ \mp D u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp D u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 + i D u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0 \right\}$$

$$\mathbf{FU}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{2G}{\rho} \left\{ \mp [(m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2 \rho^2 + (2\sigma-3)D] u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp \right.$$

$$\left. \mp [(m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2 \rho^2 + (2\sigma-3)D] u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 + i [m^2 + \lambda^2 \rho^2 (2\sigma-2)D] u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0 \right\},$$

$$\mathbf{FU}_{3,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{G}{\rho} \left\{ \pm (D+m-1) u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp (D-m-1) u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 - i m u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0 \right\}.$$

3. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ

Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совмещенных с центрами пары цилиндров. Справедливы следующие теоремы сложения [13]

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, \varphi_1, z_1) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(12)} f_{1,\lambda,m}^{(33)l} \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, \varphi_2, z_2) \quad (11)$$

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_2, \varphi_2, z_2) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(12)} f_{1,\lambda,m}^{+(33)l} \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{+(3)}(\rho_1, \varphi_1, z_1) \quad (12)$$

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_1, \varphi_1, z_1) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(12)} f_{1,\lambda,m}^{-(33)l} \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_2, \varphi_2, z_2) \quad (13)$$

$$f_{1,\lambda,m}^{(33)l} = (-1)^l u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{12}, \varphi_{12}, z_{12}), \quad f_{\lambda,m}^{\pm(33)l} = u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{12}, \varphi_{12}, z_{12})$$

$$\tilde{D}_{s,t}^{(ij)} = \left[\delta_{st} + \delta_{t1} \delta_{s2} \rho_{ij} \frac{\partial}{\partial \rho_{ij}} \right] \quad s, t = 1 \div 3, \quad i, j = 1 \div N, \quad i \neq j$$

Здесь $(\rho_{12}, \varphi_{12}, z_{12})$ – координаты начала O_2 цилиндрической системы координат (ρ_2, φ_2, z_2) в системе координат (ρ_1, φ_1, z_1) .

4. РАЗРЕШАЮЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Используя теоремы сложения (11)-(13), представим вектор перемещения \mathbf{U} в системе координат с началом в точке O_0

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \sum_{j=1}^4 \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(0j)} u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \times \\ & \times \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{+(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda \end{aligned}$$

и с началом в точке O_j

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \\ & + \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \tilde{D}_{s,t}^{(j,\alpha)} u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha}) \times \\ & \times \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \times \\ & \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(0j)} u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda \end{aligned}$$

где $(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha})$ – координаты начала O_α цилиндрической системы координат $(\rho_\alpha, \varphi_\alpha, z_\alpha)$ в системе координат (ρ_j, φ_j, z_j) .

Учитывая равенства

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)e^{-i\varphi} + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)e^{i\varphi} = \mathbf{e}_{-1}e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_1e^{i\varphi}$$

вектор нагрузки в формуле (2) можно представить интегралом Фурье

$$\sigma_\rho \Big|_{\Gamma_0} \mathbf{e}_\rho = (\mathbf{e}_{-1}e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_1e^{i\varphi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T \sin \lambda h}{\pi \lambda} e^{i\lambda z} d\lambda$$

После удовлетворения граничных условий с учетом единственности представления вектора \mathbf{FU} интегралом Фурье по переменной z и рядом Фурье по переменной φ , задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_{s,m}^{(j)}(\lambda)$, $B_{s,m}^{(j)}(\lambda)$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_0) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_0) \sum_{j=1}^4 \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) \times \right. \\ \left. \times \tilde{D}_{s,t}^{(0j)} u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \right\} = \frac{T \sin \lambda h}{\pi \lambda} \delta_{m0}(1, 1, 0) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_j, G_0, \sigma_0) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j, G_0, \sigma_0) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) \times \right. \\ \left. \times (-1)^l \tilde{D}_{s,t}^{(j\alpha)} u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha}) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j, G_0, \sigma_0) \times \right. \\ \left. \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(0j)} u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \right\} = \sum_{s=1}^3 B_{s,\lambda,m}^{(j)} \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j, G_j, \sigma_j) \quad (15)$$

$$\sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_j, \sigma_0) + \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j, \sigma_0) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) \times \right. \\ \left. \times (-1)^l \tilde{D}_{s,t}^{(j\alpha)} u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha}) + \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j, \sigma_0) \times \right. \\ \left. \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(0j)} u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \right\} = \sum_{s=1}^3 B_{s,\lambda,m}^{(j)} \mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j, \sigma_j) \quad (16)$$

$j = 1, 2, \dots, 24; \quad m \in \mathbb{Z}; \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0.$

где

$$\mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(R, G, \sigma) = \left(G_{s,\lambda,m}^{\pm(-1)}, G_{s,\lambda,m}^{\pm(1)}, G_{s,\lambda,m}^{\pm(0)} \right),$$

$$G_{1,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, G, \sigma) = \mp \frac{2G}{R} D \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \quad G_{1,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, G, \sigma) = \pm \frac{2G}{R} D \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{1,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, G, \sigma) = \frac{2G}{R} i D \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R), \quad G_{3,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, G, \sigma) = -\frac{G}{R} i m \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{3,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, G, \sigma) = \mp \frac{G}{R} (D - m - 1) \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{3,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, G, \sigma) = \pm \frac{G}{R} (D + m - 1) \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{2,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, G, \sigma) = \frac{2G}{R} i [m^2 + \lambda^2 R^2 + (2\sigma - 2)D] \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{2,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, G, \sigma) = \mp \frac{2G}{R} [(m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2 R^2 + (2\sigma-3)D] \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R),$$

$$G_{2,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, G, \sigma) = \mp \frac{2G}{R} [(m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2 R^2 + (2\sigma-3)D] \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$\mathbf{H}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(R, \sigma) = \left(H_{s,\lambda,m}^{\pm(-1)}, H_{s,\lambda,m}^{\pm(1)}, H_{s,\lambda,m}^{\pm(0)} \right),$$

$$H_{1,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, \sigma) = \mp \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \quad H_{1,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, \sigma) = \mp \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$H_{1,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, \sigma) = i \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R), \quad H_{2,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, \sigma) = i D \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R),$$

$$H_{2,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, \sigma) = \mp (D - \chi) \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R),$$

$$H_{2,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, \sigma) = \mp (D - \chi) \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R), \quad H_{3,\lambda,m}^{\pm(0)}(R, \sigma) = 0,$$

$$H_{3,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R, \sigma) = \pm \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \quad H_{3,\lambda,m}^{\pm(1)}(R, \sigma) = \mp \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$\tilde{u}_{\lambda,m}^{+(3)}(R) = \tilde{K}_m(\lambda R), \quad \tilde{u}_{\lambda,m}^{-(3)}(R) = I_m(\lambda R),$$

(α, β, γ) – координаты вектора $\alpha \mathbf{e}_{-1} + \beta \mathbf{e}_1 + \gamma \mathbf{e}_0$ в базисе $\{\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0\}$.

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

При численной реализации задачи предполагалось, что $R_j = R$ ($j = 1 \div 24$), $R_0 = 10R$. Коэффициенты Пуассона материалов матрицы и волокон приняты равными соответственно $\sigma_0 = 0.38$ и $\sigma_j = 0.21$, что соответствует волокнам из алюмоборосиликатного стекла ($G_j = 75$ ГПа) с эпоксидно-малеиновым связующим ($G_0 = 3$ ГПа). Система уравнений (14)-(16) решена численно методом редукции по индексу m при фиксированном λ , т.е. бесконечная система уравнений заменяется конечной системой, в которой индексы меняются в диапазоне $-m_{max} \leq m, l \leq m_{max}$. Рассматривались случаи $m_{max} = 5, 8, 10$ (табл.1) при $a/R = 1.5$, $h/R_0 = 1.0$, $G_j/G = 25$ ($2a$ – расстояние между центрами соседних полостей в гексагональной ячейке). Сравнивались значения напряжений в средней точке отрезка AB (см.рис.1). Метод показал хорошую сходимость уже при $m_{max} = 5$.

Нормальные компоненты тензора напряжений вычислялись на наиболее характерных в смысле распределения напряжений линиях. Выбирались линии AB и CD , принадлежащие границе гексагональной ячейки и ее диагонали, и соответствующие им линии A_1B_1 и C_1D_1 в нецентральной ячейке (рис.1).

Таблица 1.

Сходимость метода редукции.

m_{max}	5	8	10
σ_x / T	1.0812	1.08641	1.08656
σ_y / T	0.648698	0.64797	0.647916
σ_z / T	0.499931	0.501547	0.50158

На рис.2 приведены графики распределения напряжений σ_x / T , σ_y / T и σ_z / T на линиях AB (слева) и CD (справа) (рис.1) в зависимости от относительного расстояния между включениями a/R в плоскости $z = 0$.

На линии AB наблюдается рост нормальных напряжений при приближении волокон без существенного изменения их характера. Иначе себя ведут напряжения на линии CD . Напряжения σ_x / T и σ_y / T убывают с приближением волокон, в то время как напряжения σ_z / T на концах линии убывают, а в середине – растут. Наблюдается также отличие в характере распределения напряжений на линиях AB (одномодальные кривые) и CD (двухмодальные кривые).

На рис.3 приведено сравнение нормальных напряжений на линиях AB (слева) и CD (справа) для низко модульных ($G_j/G = 25$) и высоко модульных волокон ($G_j/G = 100$). В целом характер распределения напряжений не меняется, однако, напряжения σ_x / T и σ_y / T уменьшаются с ростом G_j/G , в то время как σ_z / T , наоборот – увеличиваются. Изменения составляют 3-6%.

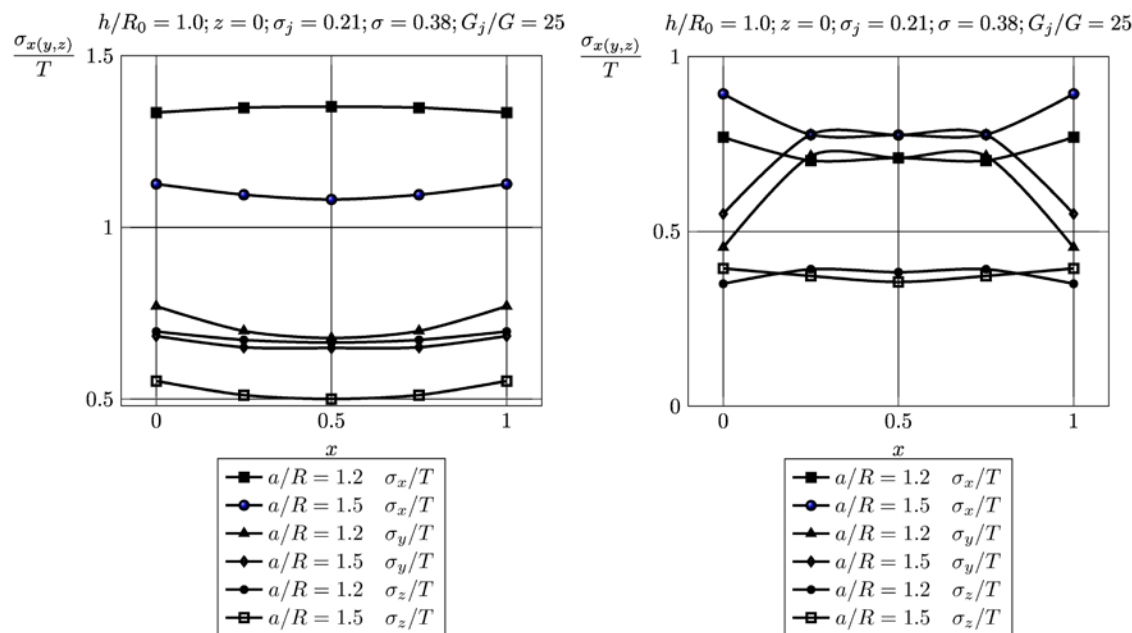


Рис.2. Распределение напряжений на линиях *AB* (слева) и *CD* (справа) в зависимости от относительного расстояния между включениями.

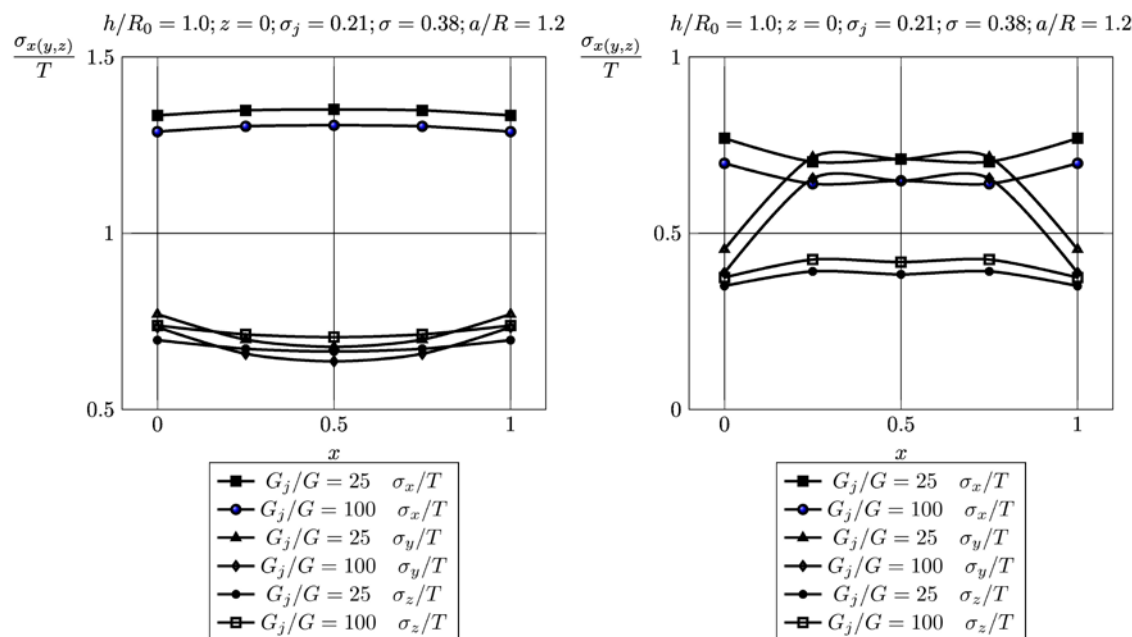


Рис.3. Сравнение напряжений на линиях *AB* (слева) и *CD* (справа) при разном отношении G_j/G .

На рис.4 приведено сравнение графиков напряжений на линиях *AB* (слева) и *CD* (справа) при различном количестве включений. Сравняются случаи 24 и 6 включений. Считается, что 6 включений образуют центральную ячейку гексагональной упаковки с рассматриваемыми 24 волокнами. С увеличением числа ячеек в гексагональной упаковке наблюдается незначительное увеличение напряжений σ_x/T , σ_y/T и заметное увеличение напряжений σ_z/T . На характер распределения напряжений количество ячеек не влияет.

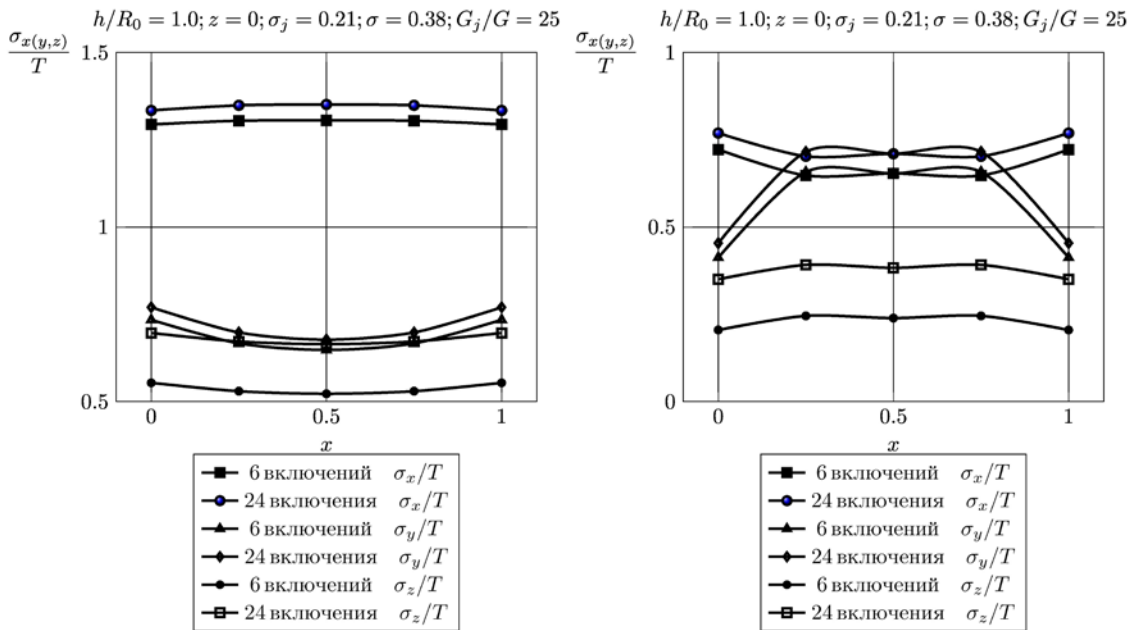


Рис.4. Сравнение напряжений на линиях AB (слева) и CD (справа) при разном количестве волокон в упаковке.

На рис.5 представлены графики распределения напряжений на соответствующих линиях AB и A_1B_1 , CD и C_1D_1 в двух ячейках (рис.1). Анализ данных показывает, что в нецентральной ячейке значения напряжений выше, чем в центральной ячейке, причем, наибольшее отличие наблюдается в распределении напряжений σ_x/T . Для нецентральной ячейки характерным является несимметричное распределение напряжений относительно середины линии.

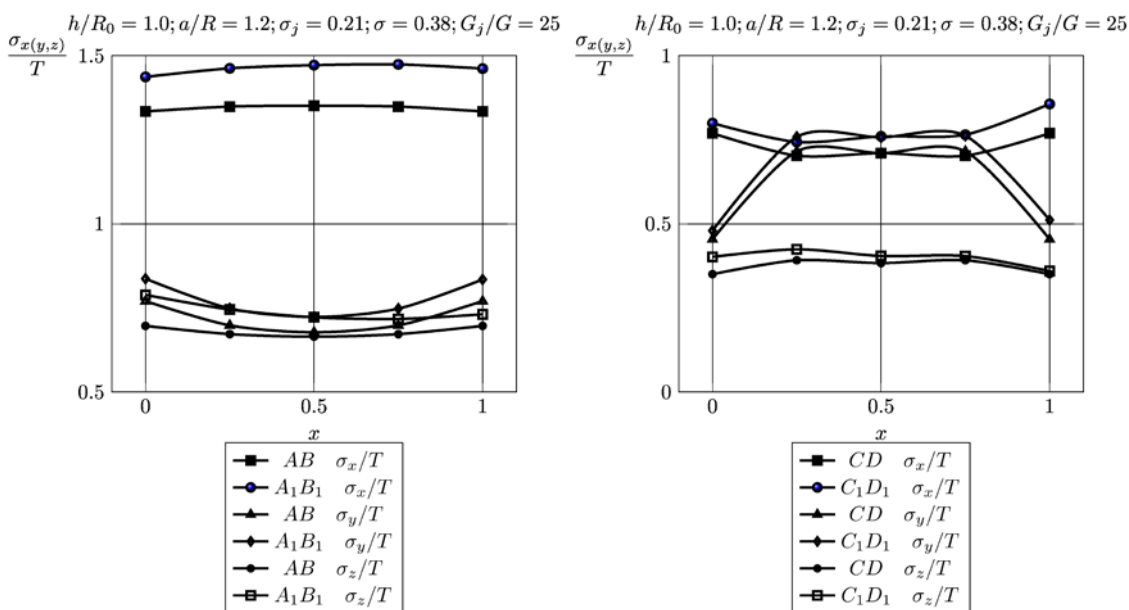


Рис.5. Сравнение напряжений на линиях AB и A_1B_1 (слева), CD и C_1D_1 (справа).

Для проверки достоверности численных результатов в случае двух включений применялся метод конечных элементов. На рис.6 приведено сравнение нормальных напряжений на отрезке AB , вычисленных методом конечных элементов (FEM) и обобщенным методом Фурье (GFM). При этом рассматривались следующие характеристики матрицы и включений: $\sigma = 0.38$, $\sigma_j = 0.21$, $G_j/G = 25$, $a/R = 1.5$. При расчетах с помощью МКЭ бесконечный цилиндр заменялся конечным высотой $2R_0$, выбиралась конечноэлементная сетка из 721757 элементов. Графики показывают достаточно хорошее совпадение результатов, полученных двумя методами.

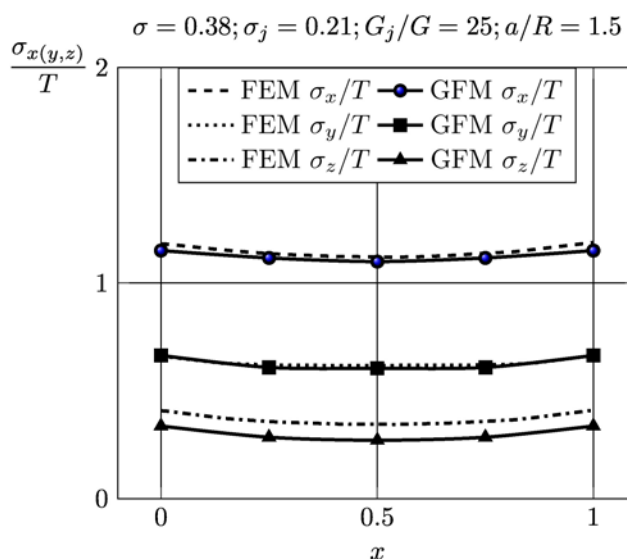


Рис.6. Сравнение напряжений на линии AB для двух включений, вычисленных с помощью МКЭ и ОМФ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена модель напряженно-деформированного состояния однонаправленного многокомпонентного материала, основанная на представлении образца материала упругим цилиндром с двадцатью четырьмя упругими цилиндрическими включениями, образующими гексагональную упаковку. В аналитическом виде строятся векторы перемещения и тензор напряжений отдельно в области матрицы и включений. Предполагается, что образец материала подвержен действию кусочно-постоянной по переменной z нормальной нагрузки, а волокна находятся в условиях идеального контакта с матрицей. Граничные условия и условия сопряжения удовлетворяются точно при помощи обобщенного метода Фурье. Параметры модели находятся из разрешающей системы, которая допускает эффективное численное решение. Проведен численный анализ напряжений в зонах их наибольшей концентрации, выявлен ряд механических эффектов. Достоверность результатов подтверждается сравнением их со случаем цилиндрического образца с шестью волокнами и сравнением нормальных напряжений в цилиндре с двумя включениями, вычисленных методом конечных элементов и обобщенным методом Фурье. Анализ сходимости численного решения к точному показал высокую эффективность методики, позволяющей удерживая лишь небольшое число

уравнений и неизвестных в разрешающей системе, получать результаты с высокой точностью в широком диапазоне изменения геометрических параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ванин Г.А.* Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наукова думка, 1985. – 304 с.
2. *Гаришин О.К., Комар Л.А.* Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2003. – Т.9. – №3. – С.278-286.
3. *Черноус Д.А., Петроковец Е.М., Конек Д.А., Шилько С.В.* Методы расчета механических характеристик пороматериалов малой плотности (обзор) // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2001. – Т.7. – №4. – С.533-545.
4. *Гордеев А.В.* Моделирование свойств композиционного материала, армированного короткими волокнами // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2010. – Т.16. – №1. – С.106-116.
5. *Khoroshun L.P.* Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // *International Applied Mechanics.* – 2000. – Vol.36. – N10. – P.1284-1316.
6. *Meleshko V.V., Tokovyy Yu.V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // *J. Eng. Math.* – 2013. – Vol.78. – P.143-166.
7. *Токовий Ю.В.* Осесиметричні напруження в скінченному пружному циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні // *Прикл. проблеми мех. і мат.* – 2010. – Вип.8. – С.144-151.
8. *Zhong Z., Sun Q.P.* Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains // *Int. J. of Solids and Structures.* – 2002. – Vol.39. – Iss.23. – P.5753-5765.
9. *Макарова Е.Ю., Соколкин Ю.В.* Нелинейные многоуровневые модели механики деформирования и разрушения композитов // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2013. – Т.19. – №3. – С.395-405.
10. *Николаев А.Г., Танчик Е.А.* Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала // *Сборник научных трудов Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е.Жуковского «ХАИ» «Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов».* – 2009. – Т.2(58). – С.48-58.
11. *Николаев А.Г., Танчик Е.А.* Развитие локальной модели напряженного состояния пористого материала // *Авиационно-космическая техника и технология.* – 2013. – №1(98). – С.14-18.
12. *Николаев А.Г., Танчик Е.А.* Локальная математическая модель зернистого композиционного материала // *Вестн. Харьк. нац. ун-та им. В.Н.Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика.* – 2010. – Т.922. – С.4-19.
13. *Николаев А.Г.* Теоремы сложения решений уравнения Ламе - Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1993. – 109 с. – Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, №1178 – Ук 93.

14. Николаев А.Г., Проценко В.С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е.Жуковского «ХАИ», 2011. – 344 с.

Поступила в редакцию 30 мая 2014 года.

Сведения об авторах:

Николаев Алексей Георгиевич – д.ф.-м.н., проф., декан Факультета ракетно-космической техники, зав.кафедрой высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им.Н.Е.Жуковского «ХАИ», Украина, г.Харьков; e-mail: k405@d4.khai.edu

Танчик Евгений Андреевич – асс., Кафедра высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им.Н.Е.Жуковского «ХАИ», Украина, г.Харьков; e-mail: eug.tanchik@yandex.ru